УДК 517.5

В.Ф. Бабенко[*,**], Д.С. Скороходов[*]

*Днепропетровский национальный университет,

**Институт прикладной математики и механики НАН Украины

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ НА КЛАССАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Розв'язана задача про найкращу інтервальну квадратурну формулу на класі W^rF диференційовних періодичних функцій з довільною переставно-інваріантною множиною F похідних порядку r. Доведено, що формула з рівними коефіцієнтами та n вузловими інтервалами, які мають рівновіддалені середини, є найкращою на даному класі.

Пусть L_p, $1 \le p \le \infty$, – пространство 2π-периодических функций $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ с обычной нормой

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, & \text{если} \quad p < \infty, \\ \operatorname{esssup}\left\{|f(t)| : t[0,2\pi)\right\}, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Пусть также $C_{2\pi}$ – это пространство непрерывных 2π-периодических функций $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ с равномерной нормой $\|f\|_C$.

Через K_n, $n \in \mathbf{N}$, обозначим множество квадратурных формул вида

$$\kappa(f) = \sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j),$$

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_1 + 2\pi$, $a_j \in \mathbf{R}$.

Пусть M – некоторый класс непрерывных 2π-периодических функций. Для $f \in M$ и $\kappa \in K_n$ положим

$$R(f,\kappa) = \int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dt - \kappa(f).$$

Погрешность приближенного интегрирования с помощью формулы $\kappa \in K_n$ на классе M мы будем характеризовать парой величин

$$R^{\pm}(M,\kappa) = \sup\left\{R(\pm f,\kappa) : f \in M\right\}.$$

Очевидно, что для симметричных классов M будет $R^+(M,\kappa) = R^-(M,\kappa)$.

Положим

$$\Xi^{\pm}(M,K_n)=\inf\left\{R^{\pm}(M,\kappa):\kappa\in K_n\right\}. \qquad (1)$$

Задача Колмогорова о наилучшей квадратурной формуле на классе M формулируется следующим образом. Найти величины (1) и формулы $\kappa\in K_n$, для которых достигаются инфимумы в правой части (1), если такие формулы существуют. Особый интерес представляет случай, когда существует одна квадратурная формула $\overline{\kappa}$, которая реализует инфимум в $\Xi^{+}(M,K_n)$ и в $\Xi^{-}(M,K_n)$. Именно такую квадратурную формулу $\overline{\kappa}$ будем называть наилучшей на классе M.

Пусть $0<h<\pi/n$ – заданное число. Через $K_n^i(h)$ обозначим множество так называемых интервальных квадратурных формул, т. е. формул вида

$$\kappa^i(f)=\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{1}{2h}\int_{y_j-h}^{y_j+h}f(t)\,dt,$$

где $y_1<y_2<\ldots<y_n<y_1+2\pi$, $b_j\in\mathbf{R}$. Для $f\in M$ и $\kappa^i\in K_n^i(h)$ положим

$$R(f,\kappa^i)=\int_0^{2\pi}f(t)\,dt-\kappa^i(f).$$

Погрешность приближенного интегрирования с помощью формулы $\kappa^i\in K_n^i(h)$ на классе M мы будем характеризовать парой величин

$$R^{\pm}(M,\kappa^i)=\sup\left\{R(\pm f,\kappa^i):f\in M\right\}.$$

Как и выше, для симметричных классов M будет $R^{+}(M,\kappa^i)=R^{-}(M,\kappa^i)$. Положим

$$\Xi^{\pm}(M,K_n^i(h))=\inf\left\{R^{\pm}(M,\kappa^i):\kappa^i\in K_n^i(h)\right\}. \qquad (2)$$

Аналог задачи Колмогорова о наилучшей интервальной квадратурной формуле на классе M может быть сформулирован следующим образом. Найти величины (2) и формулы $\kappa^i\in K_n^i(h)$, для которых достигаются инфимумы в правой части (2). И для интервальных квадратурных формул наибольший интерес представляет случай, когда существует одна формула $\overline{\kappa}^i$, реализующая инфимум одновременно в $\Xi^{+}(M,K_n^i(h))$ и в $\Xi^{-}(M,K_n^i(h))$. Такую интервальную квадратурную формулу $\overline{\kappa}^i$ будем называть наилучшей на классе M.

Интервальные квадратурные формулы являются более естественными в приложениях, чем квадратурные формулы, использующие информацию о значениях в точках, так как очень часто результаты измерений физических величин, в связи со структурой измерительных приборов, являются усредненными значениями функции, описывающей изучаемые величины, на некотором отрезке. Заметим, что обычная квадратурная формула получается из соответствующей интервальной квадратурной формулы как предельный случай при $h\to 0$.

Пусть $f \in L_1$. Через $f \perp 1$ будем обозначать тот факт, что $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$.

Пусть F – это подмножество пространства L_1 такое, что $\{f \in F : f \perp 1\} \neq \varnothing$. Для $r \in \mathbf{N}$ через W^rF обозначим класс функций f, имеющих абсолютно-непрерывную производную $f^{(r-1)}$ и таких, что $f^{(r)} \in F$. В случае, когда F – единичный шар в пространстве L_p, мы получим стандартный Соболевский класс W_p^r периодических функций.

Для неотрицательной функции $f \in L_1$ через $P(f,t)$ обозначим убывающую перестановку [7, с.130; 8, с. 92 – 93] сужения функции f на $[0,2\pi)$. Если g – произвольная функция из пространства L_1, то положим [8, с. 99]

$$\Pi(g,t) = P(g_+,t) - P(g_-,2\pi - t),$$

где $g_\pm(t) = \max\{\pm g(t),0\}$. Множество $F \subset L_1$ называется перестановочно-инвариантным или, для краткости, Π-инвариантным, если из того, что $f \in F$ и $\Pi(g) = \Pi(f)$, следует, что $g \in F$.

Примеры Π-инвариантных множеств можно найти, например, в [13].

В работах [11] для $M = W_\infty^r$ и $M = W_1^r$ (r – четное), [10] для $M = W_1^r$ (r – нечетное), [5;6] $M = W_p^r$ ($1 < p < \infty$) и [13;1] для $M = W^rF$ (F – любое Π-инвариантное множество) было показано, что формула $\kappa_n(f) = \frac{2\pi}{n}\sum_{j=1}^{n} f(2\pi j/n)$ является наилучшей на классе M.

Интервальные квадратурные формулы рассматривались многоми математиками [15;16;9;12;2;14]. Результаты о наилучших интервальных квадратурных формулах на классах дифференцируемых периодических функций известны для классов W_1^r [2], W_∞^r [14] и W^1F [3;4]. В данной работе решена задача о наилучших интервальных квадратурных формулах на классах W^rF с $r \geq 2$ и Π-инвариантными множествами F.

Через

$$D_r(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty} j^{-r}\cos(jx - \pi r/2),\ r \in \mathbf{N},$$

обозначим ядро Бернулли. Для любой функции $f \in W^rF$ имеет место следующее интегральное представление

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \int_0^{2\pi} D_r(x-t) f^{(r)}(t)\,dt = \frac{a_0}{2} + (D_r \circ f^{(r)})(x),\ \text{где } a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt. \qquad (3)$$

Для $h > 0$ и $f \in L_1$ положим

$$f^h(x) := \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt.$$

Отметим, что решая задачу о наилучших интервальных квадратурных формулах на классах W^rF, мы можем ограничиться формулами $\bar{\kappa}^i$ из $K_n^i(h)$ такими, что $\sum_{j=1}^{n} b_j = 2\pi$. Для таких формул положим

$$m^h(t) = m^h_{\kappa^i,r}(t) = -\sum_{j=1}^{n} b_j D_r^h(y_j - t).$$

Пусть также $M_n^{r,h} = \left\{ m^h_{\kappa^i,r} : \kappa^i \in K_n^i(h) \right\}$. Функции, принадлежащие множеству $M_n^{r,h}$ называются усредненными моносплайнами.

Учитывая представление (3), погрешность приближенного интегрирования функций $f \in W^rF$ с помощью формулы $\kappa^i \in K_n^i(h)$ можно представить в виде

$$R(f,\kappa^i) = \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) m^h(t)\,dt, \qquad m^h(t) = m^h_{\kappa^i,r}(t) \in M_n^{h,r}.$$

Положим

$$m^h_{n,r}(x) = -\frac{2\pi}{n}\sum_{j=1}^{n} D_r^h\left(\frac{2\pi j}{n} - x\right).$$

Основное утверждение данной работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $n,r \in \mathbf{N}$ *и* $0 < h < \pi/n$. *Тогда для любого* П-*инвариантного множества* F, *формула* $\kappa_n^i(f) = \frac{2\pi}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2h}\int_{2\pi j/n-h}^{2\pi j/n+h} f(t)\,dt$ *является наилучшей интервальной квадратурной формулой на классе* W^rF *и*

$$\Xi^{\pm}(W^rF, K_n^i(h)) = R^{\pm}(W^rF, \kappa_n^i) = \sup\left\{ \int_0^{2\pi} \Pi(\pm f, t)\Pi(m^h_{n,r}, t)\,dt : f \in F, f \perp 1 \right\}.$$

Для неотрицательных 2π-периодических функций f и F будем писать $f \prec F$, если для любого $x \in [0, 2\pi)$

$$\int_0^x P(f,t)\,dt \le \int_0^x P(F,t)\,dt.$$

При $h \to 0$ из теоремы 1 следует теорема 1.5 из [13].

Для доказательства теоремы 1 используем схему, предложенную в [13].

Теорема 1 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $n,r \in \mathbf{N}$ *и* $0 < h < \pi/n$. *Тогда для произвольного*

$m^h \in M_n^{r,h}$ *и для любого* $\lambda \in \mathbf{R}$

$$(m_{n,r}^h - \lambda)_\pm \prec (m^h - \lambda)_\pm .$$

Пусть $\gamma,\delta > 0$. Тогда для любой функции $f \in L_1$ положим

$$E_0(f)_{1;\gamma,\delta} = \inf\left\{\left\|\gamma(f-c)_+ + \delta(f-c)_-\right\|_1 : c \in \mathbf{R}\right\}.$$

Для доказательства теоремы 2, в силу теоремы 2.3 из [13], достаточно установить, что имеет место

Теорема 3. *Пусть* $n,r \in \mathbf{N}$. *Для любого* $m^h \in M_n^{r,h}$ *и любых* $\gamma,\delta>0$

$$E_0(m_{n,r}^h)_{1;\gamma,\delta} \le E_0(m^h)_{1;\gamma,\delta}.$$

Через $S_n^r(\gamma,\delta)$, $n \in \mathbf{N}$, $r = 0,1,\dots$, $\gamma,\delta > 0$, обозначим множество функций $f \in W_{\infty;\gamma,\delta}^r$ с нулевым средним значением на периоде таких, что $\gamma^{-1}(f^{(r)})_+ + \delta^{-1}(f^{(r)})_- \equiv 1$ и $f^{(r)}$ имеет не более $2n$ перемен знака на периоде.

Через $\varphi_{n,r;\gamma,\delta}(x)$ обозначим r-й периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от $2\pi/n$-периодической функции $\varphi_{0,r;\gamma,\delta}(x)$, которая равна γ для $x \in \left[0, 2\pi\delta n^{-1}(\gamma+\delta)^{-1}\right)$ и равна $-\delta$ для $x \in \left[2\pi\delta n^{-1}(\gamma+\delta)^{-1}, 2\pi n^{-1}\right)$.

Для доказательства теоремы 3 достаточно установить, что справедлива

Теорема 4. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$ *и* $\gamma,\delta>0$. *Тогда для произвольного* $n \in \mathbf{N}$ *интервальная квадратурная формула с* n *равными коэффициентами и узловыми интервалами, имеющими равноотстоящие средние точки, является наилучшей на классе* $W_{\infty;\gamma,\delta}^r$. *Более того,*

$$\Xi^\pm(W_{\infty;\gamma,\delta}^r, K_n^i(h)) = E_0(S_h(\pm m_{n,r}))_{1;\gamma^{-1},\delta^{-1}} = -2\pi \min_u (\pm\varphi_{n,r;\gamma^{-1},\delta^{-1}}^h(u)).$$

Для доказательства теоремы 4 докажем следующие две теоремы.

Теорема 5. *Для любой системы точек* $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_1 + 2\pi$ *существует* $f_r \in S_n^r(\gamma,\delta)$ *такая, что* f_r^h *принимает равные минимальные значения в точках этой системы.*

Теорема 6. *Пусть* $n,r \in \mathbf{N}$, $0 < h < \pi/n$ *и* $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$. *Тогда для любой функции* $f \in S_n^r(\gamma,\delta)$

$$E_0(\varphi_{n,r;\gamma,\delta}^h)_{1;\alpha,\beta} \le E_0(S_h(f))_{1;\alpha,\beta}.$$

При доказательстве теоремы 5 использован метод [11], а при доказательстве теоремы 6 – метод из [13]. Однако, здесь возникают серьезные трудности, связанные с тем, что неравенство

$$\nu(S_h(f)) \le \nu(f)$$

($\nu(f)$ – число перемен знака $f \in C_{2\pi}$ на периоде), вообще говоря, не верно.

Для преодоления этих трудностей нами доказана следующая

Теорема 7. *Пусть* $n \in \mathbf{N}$; $0 < h < \pi/n$; $\gamma,\delta > 0$; $s_1, s_2 \in S_n^0(\gamma,\delta)$. *Если* $\nu(s_1^h) = \nu(s_2^h) = 2n$ *и* $f(t) = s_1(t) - s_2(t)$, *то* $\nu(f^h) \le \nu(f)$.

Приведем доказательство этой теоремы.

Пусть $n \in \mathbf{N}$, $\gamma,\delta > 0$ и $0 < h < \pi/n$. Следующие два утверждения обобщают леммы 2 и 3 из [14].

Лемма 1. *Пусть* $s \in S_n^0(\gamma,\delta)$ *и пусть* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n}$ *– узлы* s *на периоде. Тогда функция Стеклова* s^h *неубывает на интервале* $\left(x_j - h, x_{j+1} - h\right)$, *если* $s(t) \equiv \gamma$ *на интервале* $\left(x_j, x_{j+1}\right)$, *и невозрастает на* $\left(x_j - h, x_{j+1} - h\right)$, *если* $s(t) \equiv -\delta$ *на* $\left(x_j, x_{j+1}\right)$.

Доказательство этой леммы проводится с помощью незначительной модификацией доказательства из [14].

Лемма 2. *Пусть* $s \in S_n^0(\gamma,\delta)$. *Предположим, что* $\nu(s^h) = 2n$. *Тогда длина интервала* $\left(x_j, x_{j+1}\right)$ *больше, чем* $2h\delta/(\gamma+\delta)$, *когда* $s(t) \equiv \gamma$ *на этом интервале, и больше, чем* $2h\gamma/(\gamma+\delta)$, *когда* $s(t) \equiv -\delta$ *на* $\left(x_j, x_{j+1}\right)$.

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} < x_1 + 2\pi$ обозначают узлы сплайна s и пусть $x_{2n+1} = x_1 + 2\pi$. Так как $\nu(s^h) = 2n$, по предыдущей лемме, то получим, что $s^h(x_j - h)s^h(x_{j+1} - h) < 0$, $j = \overline{1, 2n-1}$. Без ограничения общности, предположим, что $\operatorname{sign} s^h(x_j - h) = (-1)^j$, $j = \overline{1, 2n}$. Из этого следует, что $s(t) \equiv \gamma$ на интервале $\left(x_1, x_2\right)$.

Отметим, что сумма длин всех интервалов $\left(x_j, x_{j+1}\right)$, $j = \overline{1, 2n}$, на которых s принимает значение γ, равна $2\pi\delta/(\gamma+\delta)$. Следовательно, существует интервал длина которого больше $2h\delta/(\gamma+\delta)$ и на котором $s(t) \equiv \gamma$. Аналогично, существует интервал длина которого больше $2h\gamma/(\gamma+\delta)$ и на котором $s(t) \equiv -\delta$.

Предположим, что условие леммы не выполняется. Тогда, из замечания, приведенного выше, получим два возможных случая:

1) Существует $1 \le j \le 2n$ такое, что $s(t) \equiv \gamma$ для $t \in \left(x_{j-1}, x_j\right)$, $s(t) \equiv -\delta$ для $t \in \left(x_j, x_{j+1}\right)$ и длина интервала $\left(x_{j-1}, x_j\right)$ больше $2\pi\delta/(\gamma+\delta)$, а длина интервала

$\left(x_j, x_{j+1}\right)$ меньше $2h\gamma/(\gamma+\delta)$.

2) Существует $1 \le j \le 2n$ такое, что $s(t) \equiv -\delta$ для $t \in \left(x_{j-1}, x_j\right)$, $s(t) \equiv \gamma$ для $t \in \left(x_j, x_{j+1}\right)$ и длина интервала $\left(x_{j-1}, x_j\right)$ больше $2h\gamma/(\gamma+\delta)$, а длина интервала $\left(x_j, x_{j+1}\right)$ меньше $2\pi\delta/(\gamma+\delta)$.

Подробно рассмотрим первый случай. Второй может быть изучен аналогично. Без ограничения общности предположим, что $j = 2$. Отсюда получим $s^h(x_3 - h) < 0$, так как $\operatorname{sign} s^h(x_3 - h) = -1$.

Пусть сначала $x_3 - 2h \le x_2 - 2\pi\delta/(\gamma+\delta)$. Тогда

$$s^h(x_3\text{-}h) = \frac{1}{2h}\int\limits_{x_3-2h}^{x_3} s(t)\,dt = \frac{1}{2h}\left(\int\limits_{x_3-2h}^{x_2-2\pi\delta/(\gamma+\delta)} s(t)\,dt + \int\limits_{x_2-2\pi\delta/(\gamma+\delta)}^{x_2} s(t)\,dt + \int\limits_{x_2}^{x_3} s(t)\,dt\right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{2h}\left[(-\delta)\cdot\left(x_2 - \frac{2h\delta}{\gamma+\delta} - x_3 + 2h\right) + \gamma\cdot\frac{2h\delta}{\gamma+\delta} - \delta\cdot(x_3 - x_2)\right] = 0.$$

В том случае, когда $x_3 - 2h \ge x_2 - 2\pi\delta/(\gamma+\delta)$, получим

$$s^h(x_3 - h) = \frac{1}{2h}\left(\int\limits_{x_3-2h}^{x_2} s(t)\,dt + \int\limits_{x_2}^{x_3} s(t)\,dt\right) = \frac{1}{2h}\left[2h\gamma - (\gamma+\delta)(x_3 - x_2)\right] > 0.$$

Таким образом, $s^h(x_3 - h) \ge 0$, что противоречит тому, что $s^h(x_3 - h) < 0$.

Следующее утверждение сразу следует из леммы 2.

Лемма 3. *Пусть* $s \in S_n^0(\gamma,\delta)$ *таков, что* $\nu(s^h) = 2n$. *Тогда для любого* $x \in [0, 2\pi)$ *сплайн* s *имеет не более двух перемен знака на* $(x - h, x + h)$.

Рассматривая различные возможности расположения точек перемены знака сплайнов s_1 и s_2 и, используя лемму 3, получаем, что имеет место

Лемма 4. *Пусть* $s_1, s_2 \in S_n^0(\gamma,\delta)$ *таковы, что* $\nu(s_1^h) = \nu(s_2^h) = 2n$, *и пусть* x *– произвольная точка из* $[0, 2\pi)$. *Тогда разность* $f(t) = s_1(t) - s_2(t)$ *имеет не более двух перемен знака на интервале* $(x - h, x + h)$.

Лемма 5. *Пусть* $s_1, s_2 \in S_n^0(\gamma,\delta)$ *таковы, что* $\nu(s_1^h) = \nu(s_2^h) = 2n$. *Если* $x \in [0, 2\pi)$ *таково, что функция* $f(t) = s_1(t) - s_2(t)$ *имеет ровно две перемены знака на интервале* $(x - h, x + h)$, *то существует* $\tilde{x} > 0$ *такое, что функция* f *имеет ровно одну перемену знака на интервале* $(x + \tilde{x} - h, x + \tilde{x} + h)$. *Более того,* $f^h(y) = f^h(x)$ *для произвольного* $y \in [x, x + \tilde{x}]$.

Доказательство. Пусть $x \in [0, 2\pi)$ удовлетворяет условиям леммы.

Анализируя различные возможные расположения узлов сплайнов s_1 и s_2 на отрезке $[x-h,x+h]$, мы получим, что функция f имеет ровно две перемены знака на этом интервале, только когда оба сплайна s_1 и s_2 имеют ровно две перемены знака на отрезке $[x-h,x+h]$ и существует окрестность $U(x-h)$ точки $x-h$ такая, что $s_1(t)\equiv\text{const}$ и $s_2(t)\equiv\text{const}$, если $t\in U(x-h)$, причем $s_1(x-h)\cdot s_2(x-h)<0$. Без ограничения общности предположим, что $s_1(x-h)=\gamma$ и $s_2(x-h)=-\delta$. Пусть $x_{1,1}$, $x_{1,2}$, $x_{1,3}$ и $x_{1,4}$ – соседние узлы сплайна s_1 такие, что

$$x_{1,1}\le x-h<x_{1,2}<x_{1,3}<x+h\le x_{1,4}$$

и пусть $x_{2,1}$, $x_{2,2}$, $x_{2,3}$ и $x_{2,4}$ – соседние узлы сплайна s_2 такие, что

$$x_{2,1}\le x-h<x_{2,2}<x_{2,3}<x+h\le x_{2,4}.$$

Тогда $s(t)\equiv\gamma$, когда $t\in(x_{1,1},x_{1,2})$ или $t\in(x_{1,3},x_{1,4})$, и $s(t)\equiv-\delta$, когда $t\in(x_{1,2},x_{1,3})$. В то же время $s(t)\equiv-\delta$, когда $t\in(x_{2,1},x_{2,2})$ или $t\in(x_{2,3},x_{2,4})$, и $s(t)\equiv\gamma$, когда $t\in(x_{2,2},x_{2,3})$.

Положим $\tilde{x}=\min\{x_{1,2}-x+h;x_{2,2}-x+h\}$. Без потери общности предположим, что $\tilde{x}=x_{1,2}-x+h$. Тогда сплайны s_1 и s_2 принимают значения γ и $-\delta$ на интервале $(x-h,x_{1,2})$ соответственно. Таким образом, получим, что $f(t)=\gamma+\delta$ для $t\in(x-h,x_{1,2})$.

В то же время сплайны s_1 и s_2 равны γ и $-\delta$ соответственно на интервале $(x+h,x+\tilde{x}+h)$. Действительно, применяя лемму 2, получим, что $x_{1,3}-x_{1,2}>2h\gamma/(\gamma+\delta)$ и $x_{1,4}-x_{1,3}>2h\delta/(\gamma+\delta)$. Из последних неравенств заключаем, что $x_{1,4}-x_{1,2}>2h=x+h+x-x_{1,2}$, а тогда $x+\tilde{x}+h<x_{1,4}$. Аналогично, $x+\tilde{x}+h<x_{2,4}$.

Таким образом, для произвольного $y\in[0,\tilde{x}]$ будем иметь

$$f(x-h+y)=f(x-h)=\gamma+\delta=f(x+h)=f(x+h+y).$$

Следовательно,

$$f^h(x+z)-f^h(x)=\frac{1}{2h}\left(\int_{x-h}^{x+h}f(t)\,dt-\int_{x+z-h}^{x+z+h}f(t)\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2h}\left(\int_{x-h}^{x+z-h}f(t)\,dt+\int_{x+z-h}^{x+h}f(t)\,dt-\int_{x+z-h}^{x+h}f(t)\,dt-\int_{x+h}^{x+z+h}f(t)\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2h}\left(\int_0^z f(t-h+\tau)\,d\tau-\int_0^z f(t+h+\tau)\,d\tau\right)=0.$$

Очевидно, что функция f имеет не более одной перемены знака на отрезке $[x+\tilde{x}-h, x+\tilde{x}+h]$. Последнее замечание и завершает доказательство.

Доказательство теоремы 7. Положим $\nu(f^h)=2b$, где $b\in\mathbf{N}$. В силу лемм 4 и 5 найдутся точки $x_1<x_2<\ldots<x_{2b}<x_1+2\pi$ такие, что $\operatorname{sign} f^h(x_j)=(-1)^j$, $j=\overline{1,2b}$, и функция f имеет ровно одну перемену знака на каждом из отрезков $[x_j-h, x_j+h]$, $j=\overline{1,2b}$. Очевидно, что для любого $j=\overline{1,2b}$ найдется непустой отрезок $\Delta_j\subset[x_j-h, x_j+h]$ такой, что $\operatorname{sign} f^h(x_j)=(-1)^j$ на нем. Через y_j, y_j^* и y_j^{**} обозначим средину, левый и правый концы отрезка Δ_j соответственно. Из определения следует, что $x_j-h<y_j<x_j+h$ для всех $j=\overline{1,2b}$. Покажем, что последовательность $\{y_j\}_{j=1}^{2b}$ возрастает и $\operatorname{sign} f^h(y_j)=(-1)^j$, $j=\overline{1,2b}$.

Предположим, что найдется такое j_0, что $y_{j_0}>y_{j_0+1}$. Без ограничения общности положим $j_0=1$. Несложно видеть, что $y_2\in(x_2-h, x_2+h)$, и тогда мы заключаем из предположения и неравенства $x_1-h<x_2-h$, что $y_1\in(x_2-h, x_2+h)$ и $y_2\in(x_1-h, x_1+h)$. Легко также проверить, что

$$x_1-h<x_2-h\le y_2^*<y_2^{**}\le y_1^*<y_j^{**}\le x_1+h<x_2+h.$$

Таким образом, $f(t)\ge 0$, когда $t\in(x_1-h, x_2-h)$, ведь иначе найдутся три точки из отрезка $[x_1-h, x_1+h]$, в которых функция $f(t)$ принимает значения поочередно разных знаков. Аналогично, $f(t)\le 0$, когда $t\in(x_1+h, x_2+h)$. Следовательно,

$$0<f^h(x_2)-f^h(x_1)=-\int_{x_1-h}^{x_2-h} f(t)\,dt+\int_{x_1+h}^{x_2+h} f(t)\,dt\le 0,$$

что невозможно. Таким образом, $y_1<y_2<\ldots<y_{2b}<y_1+2\pi$. Тот факт, что $\operatorname{sign} f^h(y_j)=(-1)^j$, $j=\overline{1,2b}$, имеет место в силу выбора точек y_j.

Отсюда следует, что $\nu(f)\ge 2b=\nu(f^h)$. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко В.Ф.** Неравенства для перестановок дифференцируемых периодических функций, задачи приближения и приближенного интегрирования // Докл. АН СССР. – 1983 – 272 – С. 1038–1041.

2. **Бабенко В.Ф.** О задаче оптимизации приближенного интегрирования // Изучение современных вопросов суммирования и приближения функций и их приложение, – Д. – 1984 – С. 3–13.

3. **Бородачев С.В.** Об оптимизации интервальной квадратурной формулы на некотором несимметрическом классе периодических функций // Вестник Дніпропетр. ун-ту, Математика – 1999 – 4 – С. 19–24.

4. **Бородачев С.В.** Об оптимальных интервальных квадратурных формулах на некоторых классах абсолютно непрерывных функций // Вестник Дніпропетр. ун-ту, Математика – 2000 – 5 – С. 28–34.

5. **Женсыкбаев А.А.** Наилучшая квадратурная формула на некоторых классах периодических функций // Изв. АН СССР, Серия. Матем. – 1977 – 41 – С. 1110–1124.

6. **Женсыкбаев А.А.** Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы – Усп. Мат. Наук – 1981 – 36 – С. 107–159.

7. **Корнейчук Н.П.** Экстремальные задачи теории приближений – М., – 1976, С. 320.

8. **Корнейчук Н.П.** Приближения с ограничениями / Н.П. Корнейчук, А.А. Лигун, В.Г. Доронин – К., – 1982, С. .

9. **Кузьмина А.Л.** Интервальные квадратурные формулы с кратными узловыми интервалами // Изв. вузов, Матем. – 1980 – 7 – С. 39–44.

10. **Лигун А.А.** Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы на некоторых классах функций // Мат. Заметки – 1976 – 19 – С. 913–926.

11. **Моторный В.П.** О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ на некоторых классах периодических дифференцируемых функций // Изв. Акад. Наук СССР. Серия Матем. – 1974 – 38 – С. 583–614.

12. **Шарипов Р.Н.** Наилучшие интервальные квадратурные формулы на классах Липшица // Конструктивная теория функций и функциональный анализ, – Казань – 1983 – 4 – С. 124–132.

13. **Babenko V.F.** Approximations, widths and optimal quadrature formulae for classes of periodic functions with rearrangement invariant sets of derivatives // Anal. Math. – 1987 – 13 – P. 15–28.

14. **Motornyi V.P.** On the best quadrature formula in the class of functions with bounded r^{th} derivative // East J. on Approx. – 1998 – 4 – P. 459–478.

15. **Omladich M.** On a new type of quadrature formulae / M. Omladich, S. Pahor, S. Suhadolc // Numer. Math. – 1976 – 25 – P. 421–426.

16. **Pittnauer Fr.** Interpolation mit Intervallfunctionalen / Fr. Pittnauer, M. Reimer // Math. Z. – 1976 – 146 – P. 7–15.

Надійшла до редколегії 23.04.07