УДК 517.51

Л.Г. Бойцун, А.И. Халюзова
Днепропетровский национальный университет

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ С МНОЖИТЕЛЯМИ

Встановлені достатні умови для підсумовування інтегралів з множником методом $\left|\overline{W}, p(y)\right|_k$, $k \ge 1$.

Пусть функции $f(u)$ и $p(u)$ нтегрируемы на каждом конечном промежутке $[0, A]$, $A > 0$, $p(u)$ – положительная и $P(y) = \int_0^y p(t)dt \to \infty$, $y \to \infty$. Положим $s(t) = \int_0^t f(u)du$ и обозначим через

$$\tau(y) = \frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)s(u)du = \frac{1}{P(y)}\int_0^y (P(y) - P(u))f(u)du.$$

Говорят [1], что $\int_0^\infty f(u)du$ суммируется $\left|\overline{W}, p(y)\right|_k$, $k \ge 1$, если

$$\int_0^\infty \left(\frac{P(y)}{p(y)}\right)^{k-1} |\tau'(y)|^k dy < \infty.$$

В случае, когда k = 1, мы имеем $\left|\overline{W}, p(y)\right|$ – суммируемость интеграла [2]. Если же $p(y) = 1$, $\left|\overline{W}, p(y)\right|_k$ – суммируемость превращается в $|C,1|_k$ – суммируемость.

Говорят, что $\int_0^\infty f(t)dt$ $\left[\overline{W}, p(y)\right]_k$ – ограничен, $k \ge 1$, [3], если

$$\int_0^y p(u)|s(u)|^k du = O(P(y)),\ y \to \infty \qquad (1)$$

Т е о р е м а. *Если* $\int_0^\infty f(t)dt$ $\left[\overline{W}, p(y)\right]_k$ *– ограничен,* $k \ge 1$, *и функции* $\lambda(y)$ *и* $|\lambda(y)|$ *– непрерывно дифференцируемые и удовлетворяют условиям*

$$P(A)|\lambda'(A)| = O(p(A)|\lambda(A)|) \text{ при } A \to \infty \qquad (2)$$

и

$$\int_0^A \frac{p(y)|\lambda(y)|^k}{\mathrm{P}(y)} dy = O(1) \text{ при } \mathrm{A} \to \infty \quad , \tag{3}$$

тогда интеграл $\int_0^\infty f(t)\lambda(t)dt$ *суммируем* $|\overline{\mathrm{W}},\mathrm{p}(\mathrm{y})|_{\mathrm{k}}$, $k \geq 1$.

Доказательство. Пусть $T(y)$ – $(\overline{\mathrm{W}},\mathrm{p}(\mathrm{y}))$ – средние интеграла $\int_0^\infty f(t)\lambda(t)dt$. Тогда, по определению, мы имеем

$$T(y) = \frac{1}{\mathrm{P}(y)}\int_0^y p(t)\int_0^t f(u)\lambda(u)du = \frac{1}{\mathrm{P}(y)}\int_0^y [\mathrm{P}(y) - \mathrm{P(t)}] f(t)\lambda(t)dt,$$

и $T'(y) = \dfrac{p(y)}{\mathrm{P}^2(y)}\displaystyle\int_0^y \mathrm{P}(t) f(t)\lambda(t)dt$.

Интегрируя по частям, получим

$$T'(y) = -\frac{p(\mathrm{y})}{\mathrm{P}^2(\mathrm{y})}\int_0^y p(t)\lambda(t)s(t)dt - \frac{p(\mathrm{y})}{\mathrm{P}^2(y)}\int_0^y \mathrm{P}(t)\lambda'(t)s(t)dt + \frac{\lambda(y)s(y)p(y)}{\mathrm{P}(y)} =$$
$$= T_1(y) + T_2(y) + T_3(y).$$

Надо доказать, что

$$\int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{P}(y)}{p(y)}\right)^{k-1} |T'(y)|^k dy < \infty .$$

В силу неравенства Минковского, достаточно показать, что

$$\int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{P}(y)}{p(y)}\right)^{k-1} |T_i(y)|^k du < \infty \qquad \text{для i = 1,2,3.}$$

Применяя неравенство Гёльдера, в силу (1) получаем

$$\int_0^A \left(\frac{\mathrm{P}(y)}{p(y)}\right)^{k-1} |T_1(y)|^k dy = \int_0^A \left(\frac{\mathrm{P}(y)}{p(y)}\right)^{k-1} \left|\frac{p(y)}{\mathrm{P}^2(y)}\int_0^y p(t)\lambda(t)s(t)dt\right|^k dy \leq$$
$$\leq O(1)\int_0^A \frac{p(y)}{\mathrm{P}^2(y)}dy\int_0^y p(t)|\lambda(t)|^k|s(t)|^k dt = O(1)\int_0^A \frac{p(t)|\lambda(t)|^k|s(t)|^k}{\mathrm{P}(t)}dt =$$
$$= O(1)\int_0^A \frac{\left(|\lambda(t)|^k\right)'}{\mathrm{P}(t)}dt\int_0^t p(u)|s(u)|^k du + O(1)\int_0^A \frac{p(t)}{\mathrm{P}^2(t)}|\lambda(t)|^k dt\int_0^t p(u)|s(u)|^k du +$$
$$+ O(1)\frac{|\lambda(A)|^k}{\mathrm{P}(A)}\int_0^A p(u)|s(u)|^k du = O(1)\int_0^A \left(|\lambda(t)|^k\right)' dt + O(1)\int_0^A \frac{p(t)}{\mathrm{P}(t)}|\lambda(t)|^k dt + O(1)|\lambda(A)|^k .$$

Так как $\left(|\lambda(t)|^k\right)' = O\left(\dfrac{p(\mathrm{t})}{P(t)}|\lambda(t)|^k\right)$ в силу (2), то

$$\int_0^A \left(\frac{P(y)}{p(y)}\right)^{k-1} |T_1(y)|^k dy = O(1)\int_0^A \frac{p(t)}{P(t)}|\lambda(t)|^K dt + O(1)|\lambda(t)|^K = O(1) \text{ при } A\to\infty \text{ по (3).}$$

Рассмотрим, применяя неравенство Гёльдера

$$\int_0^A \left(\frac{P(y)}{p(y)}\right)^{k-1} |T_2(y)|^k dy = \int_0^A \left(\frac{P(y)}{p(y)}\right)^{k-1} \left|\frac{p(y)}{P^2(y)}\int_0^y P(t)\lambda'(t)s(t)dt\right|^k dy =$$

$$= O(1)\int_0^A \frac{p(y)}{P^2(y)}dy\int_0^y \frac{P^k(t)|\lambda'(t)|^k|s(t)|^k}{p^{k-1}(t)}dt = O(1)\int_0^A \frac{p(y)}{P(y)}dy\int_0^y \frac{p^k(t)|\lambda(t)|^k|s(t)|^k}{p^{k-1}(t)}dt =$$

$$= O(1)\int_0^A \frac{p(t)|\lambda(t)|^k|s(t)|^k}{P(t)}dt = O(1), \text{ при } A\to\infty, \text{ в силу (3).}$$

И, наконец,

$$\int_0^A \left(\frac{P(y)}{p(y)}\right)^{k-1} |T_3(y)|^k dy = \int_0^A \left(\frac{P(y)}{p(y)}\right)^{k-1} \left|\frac{\lambda(y)s(y)p(y)}{P(y)}\right|^k dy = \int_0^A \frac{p(y)|\lambda(y)|^k|s(y)|^k}{P(y)}dy =$$

$$= O(1) \text{ при } A\to\infty.$$

Следовательно,

$$\int_0^A \left(\frac{P(y)}{p(y)}\right)^{k-1} |T_i(y)|^k dy = O(1) \text{ при } A\to\infty \quad \text{для } i=1, 2, 3.$$

В случае, когда $k = 1$, имеем

Следствие. *Если* $\int_0^\infty f(t)dt$ $\left[\overline{W}, p(y)\right]$ *– ограничен и* $\lambda(y)$ *– такая же, как в теореме, и удовлетворяет условиям* (2) *и* (3), *тогда интеграл* $\int_0^\infty f(t)\lambda(t)dt$ $\left|\overline{W}, p(y)\right|$ *– суммируем.*

Библиографические ссылки

1. **Бойцун Л.Г.** Об эквивалентности методов $\left|\overline{B}, p(y)\right|_k$ и $\left|\overline{B}, q(y)\right|_k$ / Л.Г. Бойцун, А.И. Халюзова //Теория приближённых функций и суммирование рядов. – Д., 1983. – С. 89 –93.
2. **Бойцун Л.Г.** О $\left|\overline{B}, p(y)\right|$ – суммируемости интегралов, связанных с сопряжённым интегралом Фурье //Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Д., 1984. – С. 42 –48.
3. **Бойцун Л.Г.** О множителях суммируемости для метода $\left|\overline{B}, p(y)\right|_k$ / Л.Г. Бойцун, А.И. Халюзова//Приближение функций полиномами и сплайнами и суммирование рядов. – Д., 1982. – С.76 – 80.

Надійшла до редколегії 17.01.07