УДК 517.5

В. А. Кофанов, В. Е. Миропольский

Днепропетровский национальный университет

О ТОЧНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МАЛОЙ ГЛАДКОСТИ ИЗ КЛАССА $L_1^r(\mathrm{T})$

Отримано нову точну нерівність типу Колмогорова для диференційних періодичних функцій $x \in L_1^3$.

Пусть G есть конечный отрезок I или единичная окружность T, реализованная как отрезок $[0,2\pi]$ с отождествленными концами. Будем рассматривать пространства $L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$, измеримых функций $x : G \to \mathrm{R}$, таких что $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int\limits_G |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \text{если } 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{vrai}\sup\limits_{t \in G} |x(t)|, \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Для $s \in [1,\infty]$ и $r \in \mathrm{N}$ обозначим через $L_s^r(G)$ множество функций $x : G \to \mathrm{R}$, таких что $x^{(r-1)}$ $\left(x^{(0)} = x\right)$ локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)} \in L_s(G)$. Символом $\varphi_r(t)$, $t \in \mathrm{R}$, обозначим r-й 2π – периодический интеграл со средним значением на периоде равным нулю от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$ и положим $g_r(t) := 4^{-1}\varphi_{r-1}(t)$. В случае 2π – периодических функций вместо $L_p[0,2\pi]$ и $\|x\|_{L_p[0,2\pi]}$ будем писать L_p и $\|x\|_p$.

В этой статье мы будем изучать неравенства для норм промежуточных производных функций $x \in L_s^r(\mathrm{T})$ вида

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le C\|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha}. \tag{1}$$

Неравенства такого типа для функций $x \in L_s^r(\mathrm{T})$; $k, r \in \mathrm{N}$, $k < r$ $q, p, s \in [1,\infty]$; $\alpha \in (0,1)$, имеют место тогда и только тогда, когда [3]

$$\alpha \le \alpha_{cr} := \min\left\{1 - \frac{k}{r}, \frac{r - k + 1/q - 1/s}{r + 1/p - 1/s}\right\}. \tag{2}$$

Особый интерес представляют неравенства типа (1) с неулучшаемой константой C. Среди неулучшаемых неравенств, наиболее важны неравенства (1) с $\alpha = \alpha_{cr}$, так как из неулучшаемого неравенства типа (1) с $\alpha = \alpha_{cr}$, как правило нетрудно получить неравенство с произвольным $\alpha < \alpha_{cr}$ и точной константой C.

В [2] доказано следующее неравенство для функций $x \in L_1^2(\mathrm{T})$.

Теорема А. *При всех* $q, p \in [1, \infty]$ *для функций* $x \in L_1^2(\mathrm{T})$ *справедливо точное неравенство*

$$\|x'\|_q \le \sup_{\gamma+\delta=1/2} \frac{\|\varphi_0(\cdot;\gamma,\delta)\|_q}{\|\varphi_1(\cdot;\gamma,\delta)\|_p^{\alpha}} \|x\|_p^{\alpha} \|x''\|_1^{1-\alpha}, \tag{3}$$

где $\alpha = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{p}{q(p+1)}\right\}$, $\varphi_r(t;\gamma,\delta)$ $(\gamma > 0, \delta > 0)$ - 2π - периодические несимметричные идеальные сплайны Эйлера порядка r [5].

Основным результатом данной статьи является следующая

Теорема. *Пусть* $r = 2,3; k \in \mathrm{N}, k < r$. *Для любой функции* $x \in L_1^r$ *справедливо точное неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_1 \le \frac{\|g_{r-k}\|_1}{\|g_r\|_\infty^{1-\frac{k}{r}}} \|x\|_\infty^{1-\frac{k}{r}} \|x^{(r)}\|_1^{\frac{k}{r}}. \tag{4}$$

Заметим, что при $r = 2$ утверждение теоремы содержится в (3).

Через $\mathrm{M}_r[a,b]$ обозначим подмножество функций $x \in L_1^r[a,b]$, таких что $x'(a) = x'(b) = 0$, $|x'(t)| > 0$ для $t \in (a,b)$.

Лемма. *Пусть* $r = 2,3$. *Для любой функции* $x \in \mathrm{M}_r[a,b]$ *справедливо неравенство*

$$\left|\int_a^b x'(t)dt\right| \le \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^{r-1} \|\varphi_{r-1}\|_\infty \int_a^b |x^{(r)}(t)| dt . \tag{5}$$

Доказательство леммы. Положим

$$\gamma_r(a,b) := \sup_{\substack{x \in \mathrm{M}_r[a,b] \\ x^{(r)} \ne 0}} \frac{\left|\int_a^b x'(t)dt\right|}{(b-a)^{r-1} \int_a^b |x^{(r)}(t)| dt},$$

и покажем, что $\gamma_r(a,b)$ не зависит от a и b.

Каждой функции $x \in \mathrm{M}_r[a,b]$ поставим в соответствие функцию $y(t) = x\left(\frac{b-a}{\pi} t + a\right)$. Ясно, что $y \in \mathrm{M}_r[0,\pi]$. При этом

$$\frac{\left|\int_0^\pi y'(\mathrm{t})\mathrm{dt}\right|}{\pi^{r-1} \int_0^\pi |y^{(r)}(\mathrm{t})| \mathrm{dt}} = \frac{\left|\int_a^b x'(t)dt\right|}{(b-a)^{r-1} \int_a^b |x^{(r)}(t)| dt}.$$

Отсюда следует, что $\gamma_r(a,b) = \gamma_r(0,\pi)$, и мы можем считать, что $[a,b] = [0,\pi]$. Тогда доказываемое неравенство (5) принимает вид

$$\left|\int_0^\pi x'(t)dt\right| \le \|\varphi_{r-1}\|_\infty \int_0^\pi |x^{(r)}(t)| dt . \tag{6}$$

Фиксируем функцию $x(t)\in L_1^r[0,\pi]$ и продолжаем ее четным образом на отрезок $[-\pi,\pi]$, а затем 2π - периодически на всю ось. Очевидно, что $\tilde{x}(t)\in L_1^r(\mathrm{T})$. Применяя неравенство типа Бора-Фавара [4] к функции $\tilde{x}(t)$, получаем

$$\|\tilde{x}'\|_1 \le \|\varphi_{r-1}\|_\infty \|\tilde{x}^{(r)}\|_1 . \tag{7}$$

Ясно, что $\|\tilde{x}'\|_1 = 2\|x'\|_{L_1[0,\pi]}$ и $\|\tilde{x}^{(r)}\|_1 = 2\|x^{(r)}\|_{L_1[0,\pi]}$. Поэтому из (7) следует (6).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Фиксируем функцию $x(t)\in L_1^r$. Докажем сначала (4) при $k=1$. Так как рассматриваемые нормы инвариантны относительно сдвига, можно считать, что $x'(0)=0$. Положим $E(x'):=\{t\in[0,2\pi]: x'(t)\ne 0\}$. Ввиду непрерывности x' множество $E(x')$ открыто, и, значит, представимо в виде $E(x')=\bigcup\limits_j(\alpha_j,\beta_j)$, где $x'(\alpha_j)=x'(\beta_j)=0$, $x'(t)\ne 0$ при $t\in(\alpha_j,\beta_j)$.

Преобразуем $\|x'\|_1$ следующим образом:

$$\|x'\|_1 = \sum_j\left|\int_{\alpha_j}^{\beta_j}x'(t)dt\right| = \sum_j\left[\left|\int_{\alpha_j}^{\beta_j}x'(t)dt\right|^{\frac{r-1}{r}}\left|\int_{\alpha_j}^{\beta_j}x'(t)dt\right|^{\frac{1}{r}}\right] =$$

$$= \sum_j\left[\left(\left|x(\beta_j)-x(\alpha_j)\right|\right)^{\frac{r-1}{r}}\left|\int_{\alpha_j}^{\beta_j}x'(t)dt\right|^{\frac{1}{r}}\right].$$

Так как $\left|x(\beta_j)-x(\alpha_j)\right|\le 2\|x\|_\infty$, то $\|x'\|_1 \le \left(2\|x\|_\infty\right)^{\frac{r-1}{r}}\sum\limits_j\left|\int_{\alpha_j}^{\beta_j}x'(t)dt\right|^{\frac{1}{r}}$.

Оценивая интеграл $\left|\int_{\alpha_j}^{\beta_j}x'(t)dt\right|$ при помощи леммы, получим

$$\|x'\|_1 \le \left(2\|x\|_\infty\right)^{\frac{r-1}{r}}\|\varphi_{r-1}\|_\infty^{\frac{1}{r}}\sum_j\left[\left(\frac{\beta_j-\alpha_j}{\pi}\right)^{\frac{r-1}{r}}\left(\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\left|x^{(r)}(t)\right|dt\right)^{\frac{1}{r}}\right].$$

Применим далее к сумме неравенство Гельдера с показателями $\frac{r-1}{r}$ и r учтем, что $\sum\limits_j(\beta_j-\alpha_j)\le 2\pi$. Это приведет к оценке:

$$\|x'\|_1 \le \left(2\|x\|_\infty\right)^{\frac{r-1}{r}}\|\varphi_{r-1}\|_\infty^{\frac{1}{r}}\left(\sum_j\frac{\beta_j-\alpha_j}{\pi}\right)^{\frac{r-1}{r}}\left(\sum_j\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\left|x^{(r)}(t)\right|dt\right)^{\frac{1}{r}} \le$$

$$\le 4^{\frac{r-1}{r}} \|x\|_\infty^{\frac{r-1}{r}} \|\varphi_{r-1}\|_\infty^{\frac{1}{r}} \|x^{(r)}\|_1^{\frac{1}{r}}. \tag{8}$$

Учитывая, что $g_r(t) := 4^{-1}\varphi_{r-1}(t)$ и $\|\varphi_{r-1}\|_1 = \bigvee_0^{2\pi} \varphi_r = 4\|\varphi_r\|_\infty$, получаем

$$\frac{\|g_{r-1}\|_1}{\|g_r\|_\infty^{1-\frac{1}{r}}} = \frac{\|4^{-1}\varphi_{r-2}\|_1}{\|4^{-1}\varphi_{r-1}\|_\infty^{1-\frac{1}{r}}} = 4^{-\frac{1}{r}} \frac{\bigvee_0^{2\pi} \varphi_{r-1}}{\|\varphi_{r-1}\|_\infty^{1-\frac{1}{r}}} = 4^{1-\frac{1}{r}} \frac{\|\varphi_{r-1}\|_\infty}{\|\varphi_{r-1}\|_\infty^{1-\frac{1}{r}}} = 4^{\frac{r-1}{r}} \|\varphi_{r-1}\|_\infty^{\frac{1}{r}}.$$

Поэтому из (8) получаем доказываемое неравенство (4) при $k = 1$.

Докажем теперь (4) при $k = 2, r = 3$. Применим сначала неравенство Стейна ($k = 1, r = 2$) [6] для функции $x'(t) \in L_1^2$:

$$\|x''\|_1 \le \frac{\|g_1\|_1}{\|g_2\|_1^{\frac{1}{2}}} \|x'\|_1^{\frac{1}{2}} \|x'''\|_1^{\frac{1}{2}}.$$

Оценивая теперь $\|x'\|_1$ при помощи уже доказанного при $k = 1$ неравенства (4), получим

$$\|x''\|_1 \le \frac{\|g_1\|_1}{\|g_2\|_1^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\|g_2\|_1}{\|g_3\|_\infty^{\frac{2}{3}}} \|x\|_\infty^{\frac{2}{3}} \|x'''\|_1^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{2}} \|x'''\|_1^{\frac{1}{2}} = \frac{\|g_1\|_1}{\|g_2\|_\infty^{\frac{1}{3}}} \|x\|_\infty^{\frac{1}{3}} \|x'''\|_1^{\frac{2}{3}}.$$

Неравенство (4) доказано

Точность неравенства (4) можно проверить при помощи семейства функций Стеклова $(g_r)_h(t) = (2h)^{-1} \int_{-h}^{t+h} g_r(u)du$, полагая $h \to 0$.

Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко В.Ф.** Неравенства для производных и их приложения / В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов//– К., 2003.–592 с.
2. **Бабенко В.Ф.** О неравенствах типа Колмогорова с интегрируемой старшей производной / В.Ф. Бабенко, В.А.Кофанов, С.А. Пичугов // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, №11. – С. 1694-1697
3. **Клоц Б.Е.** Приближение дифференцируемых функций функциями большей гладкости.// Мат.заметки.– 1977.–21, №1.– С.21-32.
4. **Корнейчук Н. П.** Аппроксимация с ограничениями / Н. П. Корнейчук, А.А. Лигун, В.Г. Доронин// – К., 1982, – 252 с.
5. **Корнейчук Н. П.** Точные константы в теории приближений. – М., 1987, – 424 с.
6. **Stein E.M.** Functions of exponential type // Ann. Math. – 1957. – 65, № 3. – P. 582 – 592.

Надійшла до редколегії 31.03.07