УДК 517.54

Р.Р. Салимов

Институт прикладной математики и механики НАН Украины

К ТЕОРИИ Q -ГОМЕОМОРФИЗМОВ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Досліджується проблема продовження на межу так званих Q-гомеоморфізмів між областями в метричних просторах з мірами. Одержано умови на функцію Q(x) і межу області, при яких будь-який гомеоморфізм допускає неперервне продовження на межу.

Введение. Проблема локального и граничного поведения всегда была одной из центральных проблем в теории квазиконформных отображений и их обобщений [1–3]. В последние годы в работах многих специалистов по теории отображений интенсивно изучаются различные классы отображений с конечным искажением в R^n. Среди них отметим работы К. Астала, Э. Вилламора, С. Водопьянова, Ф. Геринга, Т. Иванца, А. Игнатьева, Д. Ковтонюка, П. Коскелы, Дж. Манфреди, Г. Мартина, О. Мартио, В. Рязанова, Е. Севостьянова, У. Сребро, Ю. Хейнонена, И. Холопаинена, Э. Якубова и других. Однако проблема остается малоизученной в метрических пространствах.

В теории квазиконформных отображений и их обобщений большую роль играют различные модульные неравенства. В связи с этим, следующая концепция была предложена профессором Олли Мартио [4 – 6]. Пусть G – область в R^n, $n \geq 2$, и пусть $Q: G \to [1, \infty]$ – измеримая функция. Гомеоморфизм $f: G \to \overline{R^n} = R^n \cup \{\infty\}$ называется Q- гомеоморфизмом, если

$$M(f\,\Gamma) \leq \int\limits_G Q(x) \cdot \rho^n(x) \, dm(x) \qquad (1)$$

для любого семейства Γ путей в G и любой допустимой функции ρ для Γ. Эта концепция является естественным обобщением геометрического определения квазиконформного отображения [7, 13.1 и 34.6].

Напомним, что борелева функция $\rho: R^n \to [0, \infty]$ называется допустимой для семейства кривых в Γ, пишут $\rho \in adm\,\Gamma$, если

$$\int\limits_\gamma \rho\, ds \geq 1 \qquad (2)$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Модуль семейства кривых Γ определяется равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in adm\,\Gamma} \int\limits_G \rho^n(x) \, dm(x) \qquad (3)$$

где m - мера Лебега в R^n.

Пусть (X, d, μ) – измеримое метрическое пространство X с метрикой d и борелевой мерой μ. Областью в X будем называть открытое множество, любые две точки которого можно связать непрерывной кривой. Пусть G – область в пространстве (X,d,μ), G' – область в (X',d',μ') и $Q:G\to[1,\infty]$ – измеримая функция. Говорим, что гомеоморфизм является Q - гомеоморфизмом, если

$$M(f\,\Gamma) \le \int\limits_G Q(x)\cdot\rho^\alpha(x) \quad d\mu(x) \tag{4}$$

для любого семейства путей Γ в G и любой допустимой функции ρ для Γ, где $\alpha\in[1,\infty)$ – хаусдорфова размерность пространства $(X,\,d)$.

Модуль семейств кривых Γ в пространстве (X,d,μ) задаем равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho\in adm\,\Gamma} \int\limits_X \rho^\alpha(x) \quad d\mu(x), \tag{5}$$

где допустимые функции для Γ, по-прежнему, определяются условием вида (2). Ранее модульная техника в метрических пространствах развивалась, например, в [9 – 10].

Напомним, что пространство (X,d,μ) называется α - регулярным по Альфорсу, если существует постоянная $C\ge1$ такая, что

$$C^{-1}r^\alpha \le \mu(B_r)\le Cr^\alpha \tag{6}$$

для всех шаров B_r в X радиуса $r<diam\,X$. Как известно, α - регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность α, [9, с.61].

О непрерывном продолжении на границу. В дальнейшем говорим, что ∂G - *сильно достижима в точке* $x_0\in\partial G$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется континуум $A\subset G$ и число $\delta>0$ такие, что

$$M\,(\Delta(A,F;G))\ge\delta \tag{7}$$

для любого связного множества F в G с $x_0\in\overline{F}$ и $F\cap\partial U\ne\emptyset$, где через $\Delta(A,F;G)$ обозначается множество всех кривых, соединяющих A и F G. Мы также говорим, что граница ∂G – *сильно достижима*, если она достижима из G в каждой своей точке.

Здесь континуумами называются компактные связные множества. Континуум K называется невырожденным, если он содержит не менее двух точек.

Понятие сильной достижимости введено для областей в R^n, $n\ge2$, в [7, 8] и это свойство имеет место для широкого класса регулярных областей в R^n таких как области квазиэкстремального расстояния по Герингу-Мартио, равномерные, выпуклые, гладкие области и т. д.

Область G называется локально связной в точке $x_0\in\partial G$, если x_0 имеет произвольно малые окрестности U в X, такие что множества $U\cap G$ являются связными. В дальнейшем (X,d,μ) и (X',d',μ') – измеримые метрические пространства конечной хаусдорфовой размерности α и $\alpha' \in [1,\infty)$, G и G' - области в (X,d) и (X',d'), соответственно.

Лемма 1. *Пусть G — локально связна в точке $x_0 \in \partial G$, $\overline{G'}$ – компакт, а $f: G \to G'$ – Q- гомеоморфизм такой, что $\partial G'$ сильно достижима из G' хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C(x_0,f) = \left\{y \in X' : y = \lim_{k\to\infty} f(x_k),\ x_k \to x_0,\ x_k \in G\right\} \tag{8}$$

$Q: G \to (0,\infty)$*- измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(x)\cdot \psi^{\alpha}_{x_0,\varepsilon}(d(x,x_0))\,d\mu(x) = o(I^{\alpha}(\varepsilon,\varepsilon_0)) \tag{9}$$

при $\varepsilon \to 0$, *где* $G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) = \{x \in G : \varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0\}$, $\varepsilon_0 < \delta(x_0) = \sup\limits_{x\in G} d(x,x_0)$ *и* $\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ *- семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на* $(0,\infty)$, *таких что*

$$0 < I(\varepsilon,\varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\,dt < \infty, \qquad \forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0). \tag{10}$$

Тогда f продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X',d').

Доказательство. Покажем, что предельное множество $E = C(x_0,f)$ состоит из единственной точки. Отметим, что $E \neq \emptyset$ ввиду компактности $\overline{G'}$ [11, Замечание 3, 41]. По условию $\partial G'$ сильно достижима в некоторой точке $y_0 \in E$. Допустим, что существует хотя бы еще одна точка $y^* \in E$. Пусть $U = B(y_0, r_0)$, где $0 < r_0 < d(y_0, y_*)$.

В силу локальной связности области G в точке x_0 найдется последовательность окрестностей U_m точки x_0 такая, что $G_m = G \cap U_m$ связно и $d(U_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда по построению

$$F_m \cap \partial U \neq \emptyset,$$

где $F_m = f\,G_m$, ввиду того, что найдутся точки y_m и $y_m^* \in F_m$ близкие к y_0 и y^*, соответственно, для которых $d(y_0,y_m) < r_0$ и $d(y_0,y_m^*) > r_0$, а множество F_m связно. По условию сильной достижимости, найдется континуум $A \subset G'$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(A,F_m,G')) \geq \delta \qquad \forall\, m = 1,2,\ldots$$

Заметим, что $K = f^{-1}(A)$ является компактом как непрерывный образ компакта. Таким образом, $\varepsilon_0 = dist(x_0,K) > 0$.

Пусть Γ_ε – семейство всех непрерывных путей в G, соединяющих шар $B_\varepsilon = \{x \in X : d(x,x_0) < \varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, с компактом K. Пусть $\psi^*_{x_0,\varepsilon}$ – борелевская функция, такая что $\psi^*_{x_0,\varepsilon}(t) = \psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ для п.в. $t \in (0,\infty)$, которая существует по теореме Лузина, [12, 2.3.5].

Тогда функция

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi^*_{x_0,\varepsilon}(d(x,x_0))/I(\varepsilon,\varepsilon_0), & x \in G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) \\ 0, & x \in X \setminus G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) \end{cases}$$

допустима для Γ_ε и, следовательно,

$$M(f\,\Gamma_\varepsilon) \le \int\limits_G Q(x)\cdot \rho^\alpha_\varepsilon(x) \quad d\mu(x).$$

Поэтому $M(f\,\Gamma_\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ ввиду (9).

С другой стороны, для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ при больших m имеет место включение $G_m \subset B_\varepsilon$, т.е. $F_m \subset fB_\varepsilon$ и, таким образом,

$$M(f\,\Gamma_\varepsilon) \ge M(\Delta(A,F_m;G'))$$

Полученное противоречие опровергает предположение, что предельное множество E является невырожденным.

Следствие 1. *В частности, если*

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0} Q(x)\cdot \psi^\alpha(d(x,x_0))\,d\mu(x) < \infty, \tag{11}$$

где $\psi(t)$ – неотрицательная измеримая функция на $(0,\infty)$ такая, что

$$0 < I(\varepsilon,\varepsilon_0) = \int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\,dt < \infty, \qquad \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0),$$

и $I(\varepsilon,\varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то Q-гомеоморфизм $f : G \to G'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X',d').

Здесь предполагается, что Q продолжена нулем вне G.

Замечание 2. Другими словами, достаточно, чтобы сингулярный интеграл в (11) сходился в смысле главного значения в точке x_0 хотя бы для одного ядра ψ с неинтегрируемой особенностью в нуле. Более того, как показывает лемма достаточно, чтобы указанный интеграл даже расходился, но с контролируемой скоростью

$$\int\limits_{G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(x)\cdot \psi^\alpha(d(x,x_0))\,d\mu(x) = o(I^\alpha(\varepsilon,\varepsilon_0)) \tag{12}$$

Выбирая в лемме 1 $\psi \equiv \frac{1}{t}$, получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* G *- область в пространстве* (X,d,μ), $\alpha \ge 2$, *которая локально связна в точке* $x_0 \in \partial G$, *а* G'*- область в пространстве* (X',d',μ') *с компактным замыканием* $\overline{G}'$ *и сильно достижимой границей* $\partial G'$. *Если измеримая функция* $Q: G \to (0,\infty)$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(x)\,d\mu(x)}{d(x,x_0)^\alpha} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^\alpha\right) \tag{13}$$

при $\varepsilon \to 0$, *где* $G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) = \{x \in G : \varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0\}$ *для* $\varepsilon < \delta(x_0)$ $\varepsilon < \delta(x_0) = \min(e^{-1}, d_0)$, $d_0 = \sup\limits_{x \in G} d(x,x_0)$, *то любой* Q*-гомеоморфизм* $f: G \to G'$ *продолжим в точку* x_0 *по непрерывности в* (X',d').

Следствие 2. *В частности, заключение Теоремы 1 остается в силе, если сходится сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x)\,d\mu(x)}{d(x,x_0)^\alpha} \tag{14}$$

в окрестности точки x_0 *в смысле главного значения.*

Здесь как и в следствии 1, подразумевается, что Q продолжена нулем вне G.

Библиографические ссылки

1. **Gutlyanskii V., Ryazanov V.**, К теории локального поведения квазиконформных отображений // Изв. РАН, серия математика, 59 (1995), – № 3, С.31 –58.
2. **Gutlyanskii V., Ryazanov V.**, On boundary correspondence under quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 21 (1996), – № 1, – P.167 – 178.
3. **Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V., Vuorinen M.**, Infinitesimal geometry of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 25 (2000), –№ 1, – P.101 –130.
4. **Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.**, Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math. – 2004. – 93. – P.215 –236.
5. **Martio O., Ryazanov V.**, *Srebro U. and Yakubov E.*, On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 2005. – 30. – P. 49 – 69.
6. **Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.**, Q-homeomorphisms // Contemporary Math. – 364 (2006), – P.193 – 203.
7. **Vaisala J.**, Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings. – Lecture Notes in Math. 229, Springer-Verlag, Berlin etc. – 1971.
8. **Näkki, R.**, Boundary behavior of quasiconformal mappings in n-space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. –484 (1970), – P.1 – 50.
9. **Heinonen J.** Lectures on Analysis on Metric Spaces. – New York: Springer-Verlag, 2001.
10. **Martio O.** Modern tools in the theory of quasiconformal mappings // Texts in Math. Ser. B., 27, Univ. Combra, Dept. Math., Combra – 2000. – P. 1 – 43.
11. **Куратовский К.**, Топология, т. 2. – М., –1969.
12. **Federer H.**, Geometric Measure Theory. – Berlin: Springer etc., 1969.

Надійшла до редколегії 08.01.06