УДК 517.5

В.Н. Трактинская

*Днепропетровский национальный университет*

# ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЭЛЕМЕНТА НАИЛУЧШЕГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

**Отримано критерій елемента найкращого наближення для функцій багатьох змінних у просторі $L_{p_1,\dots p_n}$.**

Пусть $L_{p_1,\dots p_n} = L_{\bar{p}}$ $(1 \le p_i \le \infty,\ i = \overline{1,n})$ – пространства вещественнозначных суммируемых на $K = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ функций $n$ переменных $f(x_1, x_2, \dots x_n) = f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{\bar{p}} = \|f\|_{p_1,\dots p_n} = \left[ \int_{a_n}^{b_n} \dots \left[ \int_{a_2}^{b_2} \left[ \int_{a_1}^{b_1} |f(x)|\, dx_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \right]^{\frac{p_3}{p_2}} \dots dx_n \right]^{\frac{1}{p_n}}.$$

Положим

$$|f|_{p_k,\dots p_i} = \left[ \int_{a_i}^{b_i} \dots \left[ \int_{a_{k+1}}^{b_{k+1}} \left[ \int_{a_k}^{b_k} |f(x)|^{p_k}\, dx_k \right]^{\frac{p_{k+1}}{p_k}} dx_2 \right]^{\frac{p_{k+2}}{p_{k+1}}} \dots dx_i \right]^{\frac{1}{p_i}},$$

где $1 \le k < n$, $1 < i \le n$.

Введем также в рассмотрение классы $L_{q_1,\dots q_n}$ (где хотя бы одно $q_i = \infty$) функций $f$, нормы которых определяются по формулам:

$$\|f\|_{p_1,\dots p_{n-1},\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x_n \in [a_n, b_n]} |f|_{p_1,\dots p_{n-1}},$$

$$\|f\|_{p_1,\dots,p_{i-1},\infty,p_{i+1},\dots p_n} = \left[ \int_{a_n}^{b_n} \dots \left[ \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \left( \operatorname*{ess\,sup}_{x_i \in [a_i, b_i]} |f|_{p_{i+1},\dots p_n} \right)^{p_{i+1}} dx_{i+1} \right]^{\frac{p_{i+2}}{p_{i+1}}} \dots dx_n \right]^{\frac{1}{p_n}},$$

где $1 \le i < n$, и конечны.

Г.С. Смирновым [1] был установлен критерий элемента наилучшего приближения в пространствах $L_{p,q}(K)$, где $K = [a,b] \times [c,d]$. Цель настоящей рабо-

© В.Н. Трактинская, 2007

ты – распространение результата Г.С. Смирнова на случай приближения функций $n$ $(n \geq 2)$ переменных.

Заметим, что для любых пар функций $f \in L_{\bar{p}}$ и $q \in L_{\bar{q}}$ $\left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1,\ i = \overline{1,n}\right)$ имеет место обобщение неравенства Гельдера:

$$\left| \int_K f(x)\varphi(x)dx_1 \ldots dx_n \right| \leq \|f\|_{\bar{p}} \|\varphi\|_{\bar{q}}.$$

Повторяя рассуждения соответствующей теоремы о виде линейного функционала, несложно получить следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Всякий линейный непрерывный функционал, заданный на пространстве* $L_{\bar{p}}$ *имеет вид* $F(f) = \int_K f(x)\alpha(x)dx_1 \ldots dx_n$, *где* $f(x)$ – *произвольная функция из* $L_{\bar{p}}$, *а* $\alpha(x)$ – *некоторая функция из* $L_{\bar{q}}$, *определяемая по функционалу* $F$, *и при этом* $\|F\| = \|\alpha\|_{\bar{q}}$.

Пусть на $K$ задана линейно независимая система функций $\varphi_k \in L_{\bar{p}}$ $(k = \overline{1,m})$. Обозначим $H_m = \mathrm{span}\{\varphi_1, \ldots \varphi_m\}$, $E(f, H_m)_{\bar{p}} = E_m(f)_{\bar{p}}$. В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения

**Лемма.** *Если* $f \in L_{\bar{p}}$, *то*

$$\|f\|_{\bar{p}} = \sup_g \int_K f(x)g(x)dx_1 \ldots dx_n, \tag{1}$$

*где* $\sup$ *распространен на всевозможные функции* $g \in L_{\bar{q}}$, $\|g\|_{\bar{q}} \leq 1$.

*Если* $\|f\|_{\bar{p}} > 0$, *то* $\sup$ *в правой части (1) достигается для функции вида*

$$g_0(x) = \begin{cases} |f|^{p_1-1} |f|_{p_1}^{p_2-p_1} \ldots |f|_{p_1,\ldots,p_{n-1}}^{p_n-p_{n-1}} \|f\|_{\bar{p}}^{1-p_n} \operatorname{sgn} f, & \text{если } |f|_{p_1,\ldots,p_{n-1}} \neq 0, \\ 0, \quad \text{если } |f|_{p_1,\ldots,p_{n-1}} = 0. \end{cases}$$

*Функция* $g_0$ *будет единственной (если хотя бы одно из* $p_i = 1$, *в предположении, что* $f(x) \neq 0$ *почти всюду на* $K$*).*

**Утверждение 1.** *Для любой функции* $f \in L_{\bar{p}}$

$$E_n(f)_{\bar{p}} = \sup_g \int_K f(x)g(x)dx_1 \ldots dx_n, \tag{2}$$

*где* $\sup$ *распространен на функции* $g \in L_{\bar{q}}$, *такие что* $\|g\|_{\bar{q}} \leq 1$ *и* $g \perp H_m$. $\mathrm{Sup}$ *в (2) достигается на некоторых функциях* $\varphi_0 \in L_{\bar{q}}$ *с нормой* $\|\varphi_0\|_{\bar{q}} = 1$.

**Утверждение 2.** *Полином* $P_m^* \in H_m$ *является элементом наилучшего приближения для* $f \in L_{\bar{p}} \setminus H_m$ *тогда и только тогда, когда существует функция* $g_0 \in L_{\bar{q}}$, *удовлетворяющая условиям:*

1) $\|g_0\|_{\bar{q}} = 1$;

2) $\|f\|_{\bar{p}} = \int\limits_K f(x)g_0(x)dx_1...dx_n$ ; (3)

3) $\int\limits_K P_m(x)g_0(x)dx_1...dx_n = 0, \quad \forall P_m \in H_m$.

**Теорема 2.** *Для того, чтобы полином* $P_m^* \in H_m$ *был элементом наилучшего приближения для функции* $f \notin H_m$ *достаточно и (если хотя бы одно из* $p_i = 1$ *в случае, когда* $f - P_m^* \neq 0$ *почти всюду на* K*) необходимо выполнение соотношения* $\int\limits_K P_m(x)g(x)dx_1...dx_n = 0$, $\forall P_m \in H_m$, *где*

$$g(x) = \begin{cases} \left|f - P_m^*\right|^{p_1-1}\left|f - P_m^*\right|_{p_1}^{p_2-p_1}...\left|f - P_m^*\right|_{p_1,...,p_{n-1}}^{p_n-p_{n-1}} \operatorname{sgn}(f - P_m^*), & \text{если } \left|f - P_m^*\right|_{p_1,...,p_{n-1}} \neq 0, \\ 0, \quad \text{если } \left|f - P_m^*\right|_{p_1,...,p_{n-1}} = 0. \end{cases}$$

**Доказательство.** Достаточность. Очевидно, что $\|g\|_{\bar{q}} = \|f - P_m^*\|_{\bar{p}}^{p_n-1}$. Тогда $\int\limits_K f(x)g(x)dx_1...dx_n = \int\limits_K (f - P_m^*)(x)g(x)dx_1...dx_n = \|f - P_m^*\|_{\bar{p}}^{p_n}$. С другой стороны, из утверждения 1 следует, что $\int\limits_K f(x)g(x)dx_1...dx_n \leq E_n(f)_{\bar{p}} \cdot \|f - P_m^*\|_{\bar{p}}^{p_n-1}$. Тогда получаем: $\|f - P_m^*\|_{\bar{p}} \leq E_n(f)_{\bar{p}}$.

Необходимость. Пусть $P_n^*$ – полином наилучшего приближения для функции $f \in L_{\bar{p}}$. Тогда в силу утверждения 2, найдется функция $g_0 \in L_{\bar{q}}$, удовлетворяющая условиям (3). В силу леммы условие (2) будет выполняться для функции $g_0(x)$, равной

$$\left|f - P_m^*\right|^{p_1-1}\left|f - P_m^*\right|_{p_1}^{p_2-p_1}...\left|f - P_m^*\right|_{p_1,...,p_{n-1}}^{p_n-p_{n-1}} \left\|f - P_m^*\right\|_{\bar{p}}^{1-p_n} \operatorname{sgn}(f - P_m^*),$$

если $\left|f - P_m^*\right|_{p_1,...,p_{n-1}} \neq 0$, и равной 0, если $\left|f - P_m^*\right|_{p_1,...,p_{n-1}} = 0$, причем функция $g_0$ будет единственной. Но тогда из условия 3 утверждения 2 получаем: $\int\limits_K P_m(x)g(x)dx_1...dx_n = 0$, $\forall P_m \in H_m$.

Теорема 2 полностью доказана.

1. **Смирнов Г. С.** Общий вид линейного функционала и критерий полинома наилучшего приближения в пространствах со смешанной интегральной метрикой// Укр. мат. журн. 1973. – Т.25, № 1. С. 134 – 138.

*Надійшла до редколегії 25.03.07*