Х. А. ПОРТНОЙ.

1. О поведении пределов неопределенности при регулярных преобразованиях, кандидатская диссертация, 1951.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ЛИНЕЙНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В. П. БУГАЕЦ.

В этой статье обобщаются некоторые результаты П. П. Коровкина (см. [1] и [2]) на один класс функций двух переменных.

Известно [3], что последовательность операторов

$$L_{mn}(f, x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u, y+v)\, U_{mn}(u, v)\, du dv, \quad (1)$$

где

$$U_{mn}(u, v) = U_m(u)\, U_n(v) = \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \rho_k^{(m)} \cos ku\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \sigma_l^{(n)} \cos lv\right) \quad (2)$$

и $U_m(u)$, $U_n(v)$ — четные положительные тригонометрические полиномы, первый порядка m относительно u, а второй порядка n относительно v, равномерно сходится к $f(x, y) \in C^{2\pi}$, если

$$\lim_{m\to\infty} \rho_1^{(m)} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^{(n)} = 1.$$

Введем обозначение

$$\Delta^2(f, x, y, u, v) = f(x, +u, y+v) + f(x+u, y-v) + $$
$$+ f(x-u, y+v) + f(x-u, y-v) - 4f(x, y).$$

Рассмотрим тот случай, когда порядок приближения $L_{mn}(f, x, y)$ к $f(x, y)$ в точке (x, y) зависит только от значения обобщенной второй производной функции $f(x, y)$ в точке (x, y), которую определим следующим образом

$$D_{22}f(x, y) = \lim_{(u, v)_\lambda \to 0} \frac{\Delta^2(f, x, y, u, v)}{2(u^2+v^2)},$$

предполагая, что предел существует при любом фиксированном $\eta = \dfrac{v^2}{u^2}$ и $(u, v)_\lambda$ означает, что η удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{\lambda} \leqslant \eta \leqslant \lambda, \quad \lambda \geqslant 1.$$

Имеет место следующая вспомогательная теорема, которая является аналогом теоремы 2 из [1].

Теорема 1. Пусть $U_{mn}(x, y), m$, n$=1, 2, \ldots,$ — последовательность неотрицательных полиномов порядка m относительно x и порядка n относительно у и

$$\Phi_{mn}(f) = \iint\limits_R f(x, y)\, U_{mn}(x, y)\, dx\, dy,$$

где $R = [a, b, c, d]$.

Пусть $\psi(x, y)$ — непрерывная и неотрицательная на R функция, обращающаяся в нуль только в точке $(\lambda, \mu) \in R$.

Для того, чтобы из равенства

$$\lim_{\substack{x \to \lambda \\ y \to \mu}} \frac{f(x, y)}{\psi(x, y)} = A < \infty,$$

где $f(x, y)$ — любая функция, для которого последний предел существует, следовало равенство

$$\lim_{m, n, \to \infty} \frac{\Phi_{mn}(f)}{\Phi_{mn}(\psi)} = A,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любых $\delta > 0$ и $\gamma > 0$ были справедливы равенства

$$\lim_{m, n \to \infty} \frac{\alpha_{mn}^{(1)}(\delta, \gamma)}{\Phi_{mn}(\psi)} = 0,$$

$$\lim_{m, n \to \infty} \frac{\alpha_{mn}^{(2)}(\delta, \gamma)}{\Phi_{mn}(\psi)} = 0,$$

$$\lim_{m, n \to \infty} \frac{\alpha_{mn}^{(3)}(\delta, \gamma)}{\Phi_{mn}(\psi)} = 0,$$

где

$$\alpha_{mn}^{(1)}(\delta, \gamma) = \iint_{R_1} U_{mn}(x, y)\, dxdy,$$

$$\alpha_{mn}^{(2)}(\delta, \gamma) = \iint_{R_2} U_{mn}(x, y)\, dxdy,$$

$$\alpha_{mn}^{(3)}(\delta, \gamma) = \iint_{R_3} U_{mn}(x, y)\, dyxy$$

и R_1 — множество точек $(x, y) \in R$, удовлетворяющих неравенствам:

$$|x - \lambda| \geqslant \delta, \quad |y - \mu| \geqslant \gamma;$$

соответственно

$$R_2 : |x - \lambda| \geqslant \delta, \quad |y - \mu| < \gamma;$$

$$R_3 : |x - \lambda| < \delta, \quad |y - \mu| \geqslant \gamma.$$

Теорема 2. Для того, чтобы для любых функций $f(x, y)$ и $\psi(x, y)$, имеющих обобщенные вторые производные в точке (x, y), имело место равенство

$$\lim_{m, n \to \infty} \frac{L_{mn}(f : x, y) - f(x, y)}{L_{mn}(\psi; x, y) - \psi(x, y)} = \frac{D_{22} f(x, y)}{D_{22} \psi(x, y)}, \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{m, n \to \infty} \frac{6 - \rho_2^{(m)} - \sigma_2^{(n)} - 4\rho_1^{(m)} \sigma_1^{(n)}}{2 - \rho_1^{(m)} - \sigma_1^{(n)}} = 8. \tag{4}$$

Из этой теоремы, в частности, следует, что

$$L_{mn}(f; x, y)-f(x, y) = (2-\rho_1^{(m)}-\sigma_1^{(n)}) D_{22} f(x, y) + \\ + o(2-\rho_1^{(m)}-\sigma_1^{(n)}). \qquad (5)$$

В случае ядер Валле-Пуссена

$$U_{mn}(u, v) = \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{m!^2}{(m-k)!\,(m+k)!} \cos ku\right) \times \\ \times \left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{n} \frac{n!^2}{(n-l)!\,(n+l)!} \cos l v\right),$$

для которых условие (4) выполняется, что легко, проверить, соотношение (5) примет вид

$$L_{mn}(f; x, y)-f(x, y) = D_{22} f(x, y)\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}\right) + \\ + o\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Следствие. Если для положительных тригонометрических полиномов выполнено (4), то

$$\lim_{m, n\to\infty} \frac{6-\rho_k^{(m)}-\sigma_l^{(n)}-4\rho_p^{(m)}\sigma_q^{(n)}}{2-\rho_1^{(m)}-\sigma_1^{(n)}} = \\ + \frac{1}{1+\eta}\left[k^2+\eta l^2+4(p^2+\eta q^2)\right],$$

$$k, p \leqslant m; \quad l, q \leqslant n.$$

Обозначим через Z_2 класс всех периодических функций, удовлетворяющих условию

$$|\Delta^2(f, x, y, u, v)| \leqslant 2(u^2+v^2).$$

Положим, для фиксированного $U_{mn}(u, v)$,

$$a_{mn} = \sup_{f(x, y)\in Z_2} \max_{-\pi\leqslant x, y\leqslant\pi} |L_{mn}(f; x, y)-f(x, y)|$$

Пусть b_{mn} есть точная нижняя грань величин a_{mn} по всем четным положительным тригонометрическим полиномам $U_{mn}(u, v)$, т. е.

$$b_{mn} = inf\, a_{mn}.$$

Далее, рассматривая сходимость в ограниченном смысле, будем предполагать, что предел существует при любом фиксированном $\Theta = \frac{n}{m}$ и $(m, n)_\lambda$ будет означать, что Θ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{\lambda} \leqslant \Theta \leqslant \lambda, \quad \lambda \geqslant 1.$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. Справедливо равенство

$$\lim_{(m, n)_\lambda \to \infty} (m^2 + n^2)\, b_{mn} = \pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\left(\Theta^2 + \frac{1}{\Theta^2}\right).$$

При доказательстве этой теоремы рассматривается обобщение оператора П. П. Коровкина на пространство функций двух переменных

$$A_{mn}(f; x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x + u, y + v)\, V_{mn}(u, v)\, du dv.$$

где

$$V_{mn}(u, v) = \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \rho_k^{(m)} \cos ku\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{n} \sigma_l^{(n)} \cos lv\right)$$

и

$$\rho_1^{(m)} = \cos\frac{\pi}{m+2}; \qquad \rho_2^{(m)} = \frac{m+1}{m+2} \cos\frac{2\pi}{m+2} + \frac{1}{m+2},$$

$$\sigma_1^{(n)} = \cos\frac{\pi}{n+2}, \qquad \sigma_2^{(n)} = \frac{n+1}{n+2} \cos\frac{2\pi}{n+2} + \frac{1}{n+2}.$$

Следствие. Если ограниченная и интегрируемая функция $f(x, y)$ имеет в точке (x, y) обобщенную вторую производную, то при $(m, n)_\lambda \to \infty$ справедливо равенство

$$A_{mn}(f; x, y) - f(x, y) = \frac{\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\left(\Theta^2 + \frac{1}{\Theta^2}\right)}{m^2 + n^2} \times$$

$$\times D_{22} f(x, y) + o\left(\frac{1}{m^2 + n^2}\right).$$

Это вытекает из равенства (5), так как для операторов $A_{mn}(f, x, y)$ выполнено условие теоремы 2.

Теорема 4. Справедливо равенство

$$\lim_{(m, n)_\lambda \to \infty} \frac{m^2 n^2}{m^2 + n^2} b_{mn} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Следствие. Если ограниченная и интегрируемая функция $f(x, y)$ имеет в точке (x, y) обобщенную вторую производную, то справедливо равенство

$$A_{mn}(f; x, y) - f(x, y) = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right) D_{22} f(x, y) +$$

$$+ o\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. П. П. Коровкин, О порядке приближения функций линейными положительными операторами, ДАН СССР, т. 114, № 6, 1957, с. 1158—1161.

2. П. П. Коровкин, Об одном асимптотическом свойстве положительных методов суммирования рядов Фурье и о наилучшем приближении класса Z_2 линейными положительными полиномиальными операторами, УМН, т. XIII, вып. 6, 1958, с. 99—103.

3. Э. Н. Морозов, О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных 2π-периодических функций двух переменных, Уч. зап. Калининского гос. пед. ин-та, т. XXVI, 1958, с. 129—142.

4. Г. Полиа и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, ч. 2, М., ГТТИ, 1956, с. 96.