О РЕШЕНИИ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ p-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. А. БУСУРУЛОВ.

В настоящей работе рассматриваются парные интегральные уравнения, встречающиеся в некоторых задачах теории потенциала и теории электромагнитных и акустических волн, решение которых было получено К. Дж. Трантером [1]. Показывается, что решение этих уравнений очень просто и в более простой замкнутой форме может быть получено с помощью p-аналитических функций с характеристикой $p=x$.

Пусть G — правая верхняя четверть плоскости: $x>0$, $y>0$. Известно [2], что функция

$$\tilde{f}(z)=\tilde{u}(x, y)+i\tilde{v}(x, y)=\int_{0}^{x}\frac{u(\xi, y)+i\xi v(\xi, y)}{\sqrt{x^{2}-\xi^{2}}}\,d\xi \tag{1}$$

будет x-аналитической в области G и $\tilde{v}(x, o)=0$, если функция $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ аналитическая в G и $v(x, o)=0$. Покажем, что вещественная и мнимая части основного интегрального представления x-аналитических функций (1) могут быть записаны в виде

$$\tilde{u}(x, y)=\int_{0}^{\infty}A(\alpha)e^{-\alpha y}I_{0}(\alpha x)\,d\alpha, \tag{2}$$

$$\tilde{v}(x, y)=x\int_{0}^{\infty}A(\alpha)e^{-\alpha y}I_{1}(\alpha x)\,d\alpha, \tag{3}$$

где

$$A(\alpha)=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\infty}u(x, 0)\cos\alpha x\,dx. \tag{4}$$

На основании принципа симметрии Римана-Шварца функцию $f(z)$ аналитически продолжим через мнимую полуось $y>0$ так, что $u(x, y)=u(-x, y)$, $v(x, y)=-v(-x, y)$, и будем считать, что $u(x, y)$ и $v(x, y)$ представимы интегралами Фурье

$$u(x, y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\overline{u}(\alpha, y)\cos\alpha x\,d\alpha.$$

$$v(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{v}(\alpha, y) \sin \alpha x \, d\alpha,$$

где

$$\bar{u}(\alpha, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(x, y) \cos \alpha x \, dx,$$

$$\bar{v}(\alpha, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty v(x, y) \sin \alpha x \, dx.$$

В силу гармоничности функции $u(x, y)$ в качестве $\bar{u}(\alpha, y)$ выберем решение уравнения

$$\bar{u}_{yy} - \alpha^2 u = 0,$$

стремящиеся к нулю при $y \to \infty$, т. е.

$$\bar{u}(\alpha, y) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} A(\alpha) e^{-\alpha y},$$

тогда

$$u(x, y) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty A(\alpha) e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha.$$

Для сопряженной с $u(x, y)$ гармонической функции $v(x, y)$ будем иметь

$$v(x, y) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty A(\alpha) e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha.$$

Полагая $\xi = x\beta$, вещественную и мнимую части основного интегрального представления x-аналитических функций (1) перепишем в виде

$$\tilde{u}(x, y) = \int_0^1 \frac{u(x\beta, y)\, d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{7}$$

$$\tilde{v}(x, y) = \int_0^1 \frac{x v(x\beta, y) \beta \, d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{8}$$

Подставляя (5) в (7), меняя порядок интегрирования и используя затем известное [4] интегральное представление функций Бесселя первого рода

$$\frac{I_\nu(z)}{z^\nu} = \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 (1-\beta^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos z\beta\, d\beta,$$

получаем (2). Аналогичные преобразования выражения (8) приводят к (3). В силу формулы обращения интеграла (5) заключаем справедливость соотношения (4).

Итак, для вещественной и мнимой частей рассматриваемой x-аналитической функции и их производных по x и y имеем следующие интегральные формулы:

$$\tilde{u}(x, y) = \int_0^\infty A(\alpha)\, e^{-\alpha y} I_0(\alpha x)\, d\alpha, \tag{9}$$

$$\tilde{v}(x, y) = x\int_0^\infty A(\alpha)\, e^{-\alpha y} I_1(\alpha x)\, d\alpha, \tag{10}$$

$$\tilde{u}_x(x, y) = -\int_0^\infty \alpha A(\alpha)\, e^{-\alpha y} I_1(\alpha x)\, d\alpha, \tag{11}$$

$$\tilde{u}_y(x, y) = -\int_0^\infty \alpha A(\alpha)\, e^{-\alpha y} I_0(\alpha x)\, d\alpha, \tag{12}$$

$$\tilde{v}_x(x, y) = -x\int_0^\infty \alpha A(\alpha)\, e^{-\alpha y} I_0(\alpha x)\, d\alpha, \tag{13}$$

$$\tilde{v}_y(x, y) = x\int_0^\infty \alpha A(\alpha)\, e^{-\alpha y} I_1(\alpha x)\, d\alpha. \tag{14}$$

Тот факт, что правые части равенств (9) и (10) являются, соответственно, вещественной и мнимой частями x-аналитической функции $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, следует также из (11)—(14).

Пусть теперь требуется найти решение парных интегральных уравнений

$$\int_0^\infty \alpha A(\alpha) I_1(\alpha x)\, d\alpha = -\frac{df_1(x)}{dx}, \quad (0 < x < 1), \tag{15}$$

$$\int_0^\infty A(\alpha) I_1(\alpha x)\, d\alpha = \frac{f_2(x)}{x}, \quad (x > 1). \tag{16}$$

Исходя из интегральных представлений (11) и (10), отыскание функции $A(\alpha)$ сводим к решению следующей краевой задачи x-аналитических функций: требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{u}(x, y)$, x-аналитическую в области G, непрерывную на границе области G, за исключением, быть может, точек $(0,0)$, $(0,1)$, и удовлетворяющую краевым условиям

$$\tilde{v}(x, y)|_{x=0} = 0, \qquad (0 < y < \infty),$$

$$\tilde{u}(x, y)|_{y=0} = f_1(x), \qquad (0 < x < 1)$$

$$\tilde{v}(x, y)|_{y=0} = f_2(x), \qquad (1 < x < \infty).$$

В работе [3] эта задача решена в замкнутой форме, при этом вещественная часть соответствующей аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ на вещественной полуоси определена в виде

$$u(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_0^x \frac{f_1(t)\, t dt}{\sqrt{x^2 - t^2}}, & (0 < x < 1), \\ -\dfrac{2}{\pi} \dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_\infty^x \frac{f_2(t) - D}{\sqrt{t^2 - x^2}}\, t dt, & (1 < x < \infty). \end{cases} \tag{17}$$

где постоянная $D = 0$, если $|u(x, 0)| \leqslant M|x|^{-1-\varepsilon}$ при $x \to \infty$ ($M = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const} > 0$) и аналитическая функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1}{\pi i} \int_\infty^\infty \frac{u(\xi, 0)}{\xi - z}\, d\xi$$

в верхней полуплоскости удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leqslant M|z|^{-1-\varepsilon} \text{ при } z \to \infty,$$

если же функция $f(z)$ регулярна в бесконечно удаленной точке и имеет в этой точке нуль не ниже первого порядка, то

$$D = \frac{1}{4} Im \left[2\pi i Res \frac{f(\xi)(\xi - iy)}{\sqrt{(z-\xi)(z+\xi)}} \right] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)\, dx,$$

Следовательно, решение $A(\alpha)$ парных интегральных уравнений (15), (16) дается формулой (4), где $u(x, o)$ определяется равенствами (17).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Tranter C. I., Quart. I. Math. Oxford, Ser. 2, 60—67
2. Г. М. Положій. Про одне інтегральне перетворення в класі узагальнених аналітичних функцій. Наук. щорічник Київського ун-ту за 1957 р. Вид-во КДУ, 1958.
3. Г. Н. Положий, Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Изд-во Киевского университета, 1965.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

РАЗВИТИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ГЕОМЕТРИИ В ДНЕПРОПЕТРОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Б. С. ВАКАРЧУК, Е. Ф. ЛИЩИНСКИЙ.

Научные исследования по математике в Днепропетровском госуниверситете, открытом в 1918 году, начаты в начале 30-х годов. В этот период в университете закладываются некоторые направления, которые в дальнейшем получают развитие.

Первые геометрические исследования в нашем университете связаны с именем проф. Огиевецкого И. Е. В 1923 г. вышли из печати его работы по геометрии: «О мнимых и вещественных сторонах плоского евклидова треугольника», «О фактах и соотношениях, имеющих место при перемещении плоскости самой в себя», «Основы плоской кинематической геометрии», «Основы мира и его геометризация».