ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

А. А. ВАКАРЧУК, П. Т. СТЕПАНЕНКО.

Винтовой поверхностью общего вида назовем всякую поверхность, образованную некоторой линией, вращающейся около оси и одновременно поступательно движущейся по направлению этой оси так, что скорости этих движений пропорциональны. Напишем параметрические уравнения винтовой поверхности общего вида. С этой целью отнесем винтовую поверхность к прямоугольной системе координат (0, ξ, η, ζ), приняв ось 0ζ за ось винтовой поверхности. Линию, образующую винтовую поверхность — профиль, можем считать плоским. Предположим, что в начальном положении профиль расположен в плоскости ($\xi 0 \eta$). Возьмем на профиле произвольную точку M и опустим из нее перпендикуляр MN на ось 0ζ. Обозначим ON через w, а MN т. е. расстояние точки M до оси 0ζ через $\varphi(w)$. Тогда $\varphi = \varphi(w)$ будет являться уравнением профиля в декартовых координатах. Пусть v угол поворота профиля около оси отсчитываемый от плоскости ($\xi 0 \zeta$). Если профиль вращается около 0ζ и одновременно поступательно смещается по направлению этой оси, то в новомо положении точки профиля в соответствующих плоскостях будут иметь декартовы координаты ($w + bv$, $\varphi(w)$), где b — коэффициент пропорциональности. Находим, что в нормированных вейерштрассовых координатах (x^0, x^1, x^2, x^3) винтовая поверхность общего вида, образованная данным профилем $\varphi = \varphi(w)$, будет представляться следующими параметрическими уравнениями:

$$x^0 = \operatorname{ch}\frac{\varphi(w)}{r}\cdot\operatorname{ch}\frac{w+bv}{r}, \quad x^1 = \operatorname{sh}\frac{\varphi(w)}{r}\cos v,$$
$$x^2 = \operatorname{sh}\frac{\varphi(w)}{r}\sin v, \quad x^3 = \operatorname{ch}\frac{\varphi(w)}{r}\operatorname{sh}\frac{w+bv}{r}. \tag{1}$$

Если в качестве профиля взята прямая линия, составляющая с осью угол α, то винтовую поверхность назовем косым геликоидом. Параметрические уравнения косого геликоида имеют вид:

$$x^0 = \operatorname{ch}\frac{bv}{r}\operatorname{ch}\frac{\omega}{r} + \cos\alpha\operatorname{sh}\frac{bv}{r}\operatorname{sh}\frac{\omega}{r},\quad x^1 = \sin\alpha\cos v\operatorname{sh}\frac{\omega}{r},$$

$$x^2 = \sin\alpha\sin v\operatorname{sh}\frac{\omega}{r},\quad x^3 = \operatorname{sh}\frac{bv}{r}\operatorname{ch}\frac{\omega}{r} + \cos\alpha\operatorname{ch}\frac{bv}{r}\operatorname{sh}\frac{\omega}{r}, \tag{2}$$

где ω — величина отрезка, отсекаемого прямой от оси 0ζ.

Полагая в (2) $\alpha = \pi/2$, получим параметрическое уравнение прямой винтовой поверхности. Предполагаем, что $\alpha = \pi\,\Pi(bv)$, где $\Pi(bv)$-функция Лобачевского. Это означает, что прямая — образующая винтовой поверхности, вращается вокруг оси 0ξ и одновременно скользит вдоль нее со скоростью, пропорциональной углу поворота, оставаясь при этом все время параллельной плоскости $(\xi 0 \eta)$. Образованную таким образом поверхность будем называть винтовым коноидом. Полагая вместо α в (2) $\pi - \Pi(bv)$, получим параметрическое уравнение винтового коноида. Отметим, что линии $\omega = \mathrm{const}$ являются винтовыми линиями.

Далее исследуются некоторые спиралевидные кривые, получающиеся ортогональным проектированием винтовых линий на плоскость $(\xi 0 \eta)$. В частности, если ортогонально спроектировать винтовую линию $\omega = \omega_0$, расположенную на прямой винтовой поверхности, то получим кривую, которая в полярных координатах определяется уравнениями

$$\operatorname{th}\frac{\rho}{r} = \frac{\operatorname{th}\frac{\omega_0}{r}}{\operatorname{ch}\frac{bv}{r}}.$$

При движении точки по винтовой линии ее ортогональная проекция на плоскость $(\xi 0 \eta)$ описывает спиралевидную кривую, для которой начало координат является особой точкой. Эта кривая содержится внутри круга радиуса ω_0. Уравнение спирали являющейся ортогональной проекцией линии $\omega = \omega_0$ винтового коноида на плоскость $(\xi 0 \eta)$ имеет вид:

$$\operatorname{th}\frac{\rho}{r} = \frac{\operatorname{sh}\frac{\omega_0}{r}}{\operatorname{ch}\frac{bv - t}{r}\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{\omega_0}{r} + \operatorname{ch}^2\frac{bv}{r}}},$$

где
$$\operatorname{th}\frac{t}{r}=\operatorname{th}\frac{\omega_0}{r}\operatorname{th}\frac{bv}{r}\cdot$$

Рассмотрены также винтовые поверхности, профилями которых являются соответственно эквидистанта и предельная линия.

Для винтовых поверхностей общего вида имеет место теорема Бура:

Всякая винтовая поверхность общего вида изгибается на некоторую поверхность вращения. При этом изгибании винтовые линии накладываются на параллели, а их ортогональные траектории на меридианы.

Для определения профиля поверхности вращения, на которую изгибается общая винтовая поверхность, получаем дифференциальное уравнение

$$z'^2=\frac{(r^2z^2-\beta^2b^2)(z^2+\beta^2)\left[\beta^2(r^2+b^2)(z^2+1)z^2w'^2-\right.}{\beta^4(r^2+b^2)z^2w'^2\left[r^2\beta^4z^2(z^2+1)-\right.}\times$$
$$\times\frac{\left.-r^2(z^2r^2-\beta^2b^2)(z^2+\beta^2)\right]}{\left.-(r^2z^2-\beta^2b^2)(z^2+\beta^2)(z^2+1)\right)}\,. \qquad (3)$$

Здесь β -парметр, $z=\operatorname{ch}\dfrac{f(w)}{r}$, $w=f(\omega)$—уравнения профиля поверхности вращения в декартовых прямоугольных координатах. Для прямой винтовой поверхности уравнение (3) принимает вид

$$z'=(1+z^2)\sqrt{\frac{z^4+(\beta^2r^2-\beta^2b^2)z^2+\beta^4b^2r^2}{1-\beta^2r^2+\beta^2b^2+\beta^4b^2r^2}}\,. \qquad (4)$$

Рассмотрены некоторые частные случаи уравнения (4).

1). Пусть β выбрано так, что $1-\beta^2r^2+\beta^2b^2=0$ При этом, как легко видеть, решение уравнения (4) приводит к отысканию двух эллиптических интегралов, один из которых относится к эллиптическим интегралам первого рода, а второй интеграл — к интегралам третьего рода. Этому случаю соответствует уравнение определяющее профиль минимальной поверхности вращения [2]. 2). Предполагаем, что $1-\beta^2(r^2-b^2)=\beta^4b^2r^2$. Действительное значение β, удовлетворяющее этому соотношению равно $\pm 1/r$. В этом случае уравнение (4) запишется так:

$$z'=\frac{1+z^2}{r\beta}\sqrt{z^2+a^2}\,,$$

где $a = \beta^4 b^2 r^2$. Интегрируя это уравнение и учитывая, что $\operatorname{sh}\frac{f(w)}{r} = z$, получаем

$$\left[\frac{1+e^{w/r} e^c}{1-e^{w/r} e^c}\right]^2 = \frac{\beta \operatorname{sh}^2\frac{f(w)}{r}}{\operatorname{sh}^2\frac{f(w)}{r} - a^2}. \tag{5}$$

C — постоянная интегрирования.

Соотношение (5) является уравнением профиля поверхности вращения в декартовых координатах. Если учесть связь между декартовыми и нормированными вейерштрассовыми координатами

$$x^1 = \operatorname{sh}\frac{w}{r}\operatorname{ch}\frac{f(w)}{r}, \quad x^2 = \operatorname{sh}\frac{f(w)}{r}, \quad x^0 = \operatorname{ch}\frac{w}{r}\operatorname{ch}\frac{f(w)}{r},$$

то уравнение (5) примет вид

$$x^{2^2} + 1 - (x^1 - x^0)^2 e^c = 0.$$

Так как два коэффициента в группе старших членов этого уравнения отрицательные, то кривая, изображаемая этим уравнением является выпуклой гиперболой [1]. Эта кривая имеет четыре действительные абсолютные точки и четыре мнимые абсолютные касательные.

Таким образом, в случае 2) прямые винтовые поверхности могут изгибаться на однополостный гиперболоид вращения. Исследованы дифференциально-геометрические свойства линий $w = w_0$ — винтовых линий расположенных по прямой винтовой поверхности и винтовом каноиде. Кривизна и кручение для винтовых линий, расположенных на прямой винтовой поверхности постоянны, а для винтовых линий, расположенных на винтовом каноиде, связаны алгебраическим соотношением шестого порядка.

ЛИТЕРАТУРА:

1. В. Ф. Каган, Основания геометрии, ч. II, Москва, 1959 г.

2. Б. С. Вакарчук, О минимальных поверхностях вращения в пространстве Лобачевского, Научный ежегодник за 1958 год, Черновицкого госуниверситета, 1960.