О НУЛЯХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Н. В. ВАРЕХ, В. Н. ШЕВЕЛО.

Результаты, изложенные в предлагаемой статье, относится к развитию одного приема [1], [2]*) исследования осцилляторных свойств решений нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений по линейному приближению.

Установленная теорема о сравнении (теорема 9) в сочетании с теоремами 7, 9, сформулированными в работе [2], дали возможность классифицировать нелинейные уравнения вида (1) по количеству нулей их частных решений. Так, теорема 1 содержит условие, гарантирующее, что все решения уравнения (1) будут иметь не более одного нуля. Условия, при выполнении которых каждое решение уравнения (1) будет иметь в наперед заданном интервале времени не более двух нулей, содержатся в теореме 2. Выполнение условий (2), (5) (см. теорему 3) обеспечивает наличие у каждого решения уравнения (1) конечного множества нулей на полуоси $t \geqslant t_0$. Достаточный признак наличия бесконечного множества нулей у каждого решения уравнения (1) выражается неравенствами (7), (8). Теоремы 6, 7 относятся к оценке расстояний между соседними нулями решений уравнения (1). Теорема 8 содержит нижнюю оценку количества нулей решений уравнения (1) на интервале (a, b).

§ 1. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение вида

$$y'' + p(t)y + F(y, y', t) = 0, \quad t \geqslant t_0. \tag{1}$$

Пусть функции $p(t)$ и $F(y, y', t)$ — действительны, определены, непрерывны в действительном эвклидовом пространстве $R^3\{y, y', t\}$ и гарантируют, что через каждую точку пространства R^3 проходит решение уравнения (1), определенное на полуоси $t \geqslant t_0$. Пусть далее функция

*) В работе [2] содержится библиография работ, посвященных исследованию различных свойств решений дифференциальных уравнений и систем таких уравнений по первому приближению. Работы [8]—[14] являются дополнением к указанной библиографии.

$F(y, y', t)$ такова, что $F(y, y', t) = 0$ при $t \geqslant t_0$ и $\frac{F(y, y', t)}{x}$ определено и непрерывно в R^3.

Всюду дальше из рассмотрения исключается тривиальное решение уравнения (1).

Будем исследовать поведение решений уравнения (1) в системе отсчета, связанной с положением равновесия ($x = 0$) системы, описываемой уравнением (1); при этом будем исходить из следующих определений.

Определение 1. Говорят, что решение $y(t)$ уравнения (1) является осциллирующим на полуоси $t \geqslant t_0$, если существует такое множество значений $t = ti$, что $y(ti) = 0$ и $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$.

Определение 2. Решение $y(t)$ уравнения (1) называется неосциллирующим на полуоси, если существует такое значение $t = T$, что $y(t) \neq 0$ для $t > T$.

Следующие пять теорем содержат условия, позволяющие получить некоторую классификацию уравнений вида (1) по количеству нулей их частных решений.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

1. $p(t) \leqslant 0, \quad t \geqslant t_0$;

2. $$\frac{F(y, y', t)}{y} \leqslant 0 \tag{2}$$

при всех значениях y, y', t, рассматриваемых как независимые величины.

Тогда все решения уравнения (1) имеют не более одного нуля на интервале (t_0, ∞).

Теорема 2. Пусть выполняются условия:

1. Интеграл $\int\limits^{\infty} p(t)\,dt$ сходится и как функция своего нижнего предела удовлетворяет неравенству

$$\left| \int\limits_t^{\infty} p(s)\,ds \right| \leqslant \frac{1}{4t}, \quad t \geqslant t_0; \tag{3}$$

2. $$\frac{F(y, y', t)}{y} \leqslant 0. \tag{2}$$

Тогда все решения уравнения (1) имеют не более двух нулей на интервале $[t_0, \infty)$.

Теорема 3. Сходимость интеграла

$$\int^{\infty} tp(t)\,dt \tag{5}$$

и выполнение условия (2) гарантируют, что все решения уравнения (1) будут иметь n нулей ($0 \leqslant n < \infty$) на полуоси $t > t_0$.

Замечание 1 (к теореме 3): а) n-ый нуль решения уравнения (1) может быть довольно велик, б) условие (5) менее ограничительно, чем условие (10) в теореме 4 [2], как это видно из следующего примера

Пример 1. В случае уравнения

$$y'' + \frac{\sin t}{4t^2}\,y - y^3 = 0, \quad t \geqslant t_0 > 0$$

условие (10) теоремы 4 [2] не выполняется, но, условие (5) теоремы 3 выполняется и, следовательно, все решения уравнения (6) являются неосциллирующими на полуоси.

Введем в рассмотрение функцию

$$P(t) = \int^{t} p(s)\,ds \tag{6}$$

с произвольно выбранным нижним пределом интегрирования.

Теорема 4. Если выполняются условия:

1. $$\frac{1}{t}\int^{t} P(s)\,ds \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{7}$$

2. $$\frac{F(y, y', t)}{y} \geqslant 0, \tag{8}$$

то все решения уравнения (1) имеют на полуоси бесконечное множество нулей (являются осциллирующими в смысле определения 1).

Замечание 2 (к теореме 4). При выполнении условий (7), (8) первый нуль решений уравнения (1) может быть достаточно большим.

Теорема 5. Пусть выполняются условия:

1. $$p(t) \geqslant c, \qquad \text{где} \quad c\text{—const} > 0, \tag{9}$$

2. $$\frac{F(y, y', t)}{y} \geqslant 0. \tag{8}$$

Тогда все решения уравнения (1) являются осциллирующими на полуоси.

Замечание 3 (к теореме 5). При выполнении условий (8), (9) нули каждого решения уравнения (1) будут более густыми, чем нули функции $y = \sin\sqrt{c}\,t$.

§ 2. В развитие результатов, изложенных выше, сформулируем в этом параграфе некоторые теоремы, содержащие дополнительную информацию о законах распределения нулей решений уравнения (1) на конечном интервале времени.

Введем в рассмотрение уравнение первого приближения

$$x'' + p(t)\,x = 0, \quad t \in I, \quad I = [a, b]. \tag{10}$$

Теорема 6. Пусть выполняются условия:

1. $x(a) = y(a) = 0$,

2. $p(t) > 0$ — вогнута книзу в каждой точке $[a, b]$ (в окрестности каждой точки дуга кривой $y = p(t)$ лежит выше своей хорды), $p(a) \neq p(b)$;

3. $$kp(a) \geqslant k\left[(p(a))^{3/2} + \frac{3\pi k}{2}\right]^{2/3}, \tag{11}$$

где k — тангенс угла наклона хорды, соединяющей концевые точки кривой) $y = p(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$;

4. $$\frac{F(y, y', t)}{y} \geqslant 0$$

при всех y, y', $t \in I$.

Тогда решение $y(t)$ уравнения (1), обращающееся в нуль при $t = a$, снова обратится в нуль на интервале $a < t < b$.

Теорема 6 является аналогом теоремы В. Ляйтона [4], установленной для линейного уравнения вида (10).

Приведем пример,*) иллюстрирующий содержание теоремы 6.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} y'' + \left(2 - \dfrac{t^2}{\pi^2}\right) y + t^2 y^{2n-1} = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$t \geqslant t_0 \geqslant 0, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

*) Пример строится на основе одного примера В. Ляйтона [4].

С помощью соотношения (11) устанавливаем, что решение уравнения (12), обращающееся в нуль при $t=0$, обращается в нуль снова на интервале $0<t<2{,}5$.

В случае, когда функция $p(t)$ входящая в уравнения (1), (10), (является вогнутой кверху в каждой точке $[a, b]$, справедлива следующая

Теорема 7. Пусть выполняются условия:

1. $x(a)=y(a)=0;$

2. $0<p(t)\in C^2[a, b];$

3. $$b-a>\frac{p(b)}{p'(b)}>0, \qquad (b-a)^3\geqslant-\frac{9\pi^2}{4p'(x_1)},$$

$$p(x_1)=p'(x_1)(x_1-a)$$

или

$$b-a\geqslant-\frac{p(a)}{p'(a)}>0, \qquad (b-a)^3\geqslant-\frac{9\pi^2}{4p'(x_1)},$$

$$p(x_1)=p'(x_1)(x_1-b).$$

4. $$\frac{F(y, y', t)}{y}\geqslant 0$$

при всех y, y^1, $t\in[a, b]$.

Тогда решение $y(t)$ уравнения (1), обращающее в нуль при $t=a$, обратится снова в нуль в интервале $a<t\leqslant b$.

Теорема 7 является аналогом теоремы 3 В. Ляйтона [4].

Сформулируем теорему, содержащую нижнюю оценку количества нулей каждого решения уравнения (1) на заданном конечном интервале времени $I=[a, b]$.

Теорема 8. Каждое решение уравнения (1) имеет на интервале (a, b) по меньшей мере $n-1$ нулей, когда выполняются условия:

1. $p(t)\geqslant 0$ — монотонно и вогнуто книзу в $[a, b]$;

2. $$\int\limits_a^b p(t)\,dt\geqslant\frac{9}{8}n^2\pi^2\Big|(b-a), \tag{13}$$

где n — целое число.

$$3. \qquad \frac{F(y, y', t)}{y} \geqslant 0 \qquad (8)$$

при всех y, y', $t \in [a, b]$.

Эта теорема является аналогом теоремы А. Гелбрайса [5].

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$y'' + 20t(1-t)y + t^2 y^3 = 0. \qquad (14)$$

Определим нижнюю оценку количества нулей каждого решения уравнения (14) на отрезке [1, 10].

Очевидно, что условие (8) в данном случае выполняется автоматически. Из неравенства (13) устанавливаем, что $n=22$. Следовательно, в соответствии с предписанием теоремы 8 каждое решение уравнения (14) имеет на (1, 10) не меньше 21 нуля.

Этот пример показывает, что оценки количества нулей решений уравнения (1), полученные на основании теоремы 8, более точны, чем оценки, установленные с помощью аналогичной теоремы 8, сформулированной в работе [2].

В самом деле, использование теоремы 8 работы [2] приводит к выводу, что каждое решение уравнения (14) имеет на интервале (1, 10) не менее 5 нулей.

§ 3. Перейдем к доказательству теорем 1—8, сформулированных в §§ 1, 2. При доказательстве некоторых из этих теорем используется следующая теорема о сравнении.

Теорема 9. Пусть некоторое решение уравнения первого приближения (10) имеет на интервале (a, b) n нулей. Если выполняется неравенство

$$\frac{F(y, y', t)}{y} \leqslant 0$$

при всех значениях y, y', $t \in [a, b]$, рассматриваемых как независимые переменные, то каждое решение полного уравнения (1) имеет на $[a, b]$ не больше $n+1$ нулей.

Доказательство поведем от противного. Пусть выполняются условия теоремы 9, но существует решение $\bar{y}(t)$ уравнения (1), имеющее на отрезке $[a, b]$ $n+2$ нуля $|a \leqslant t_1$, t_1 — первый нуль $\bar{y}(t)$. $t_{n+2} \leqslant b$, t_{n+2} — последний нуль $\bar{y}(t)|$. На основании теоремы 7 [2] заключаем, что при выполнении условия (2), каждое решение уравнения первого приближения (10) имеет на (a, b) не менее $n+1$ нулей. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы 1. Запишем уравнение (1) в виде

$$y'' + Oy + \Phi(y, y', t) = 0,$$

где $\Phi(y, y', t) = p(t)y + F(y, y', t)$.

Очевидно, что среди решений уравнения первого приближени

$$x'' + Ox = 0 \tag{15}$$

существует решение, не имеющее на (t_0, ∞) ни одного нуля. Если выполняются условия 1 и 2 теоремы 1, то на основании теоремы 9 заключаем, что каждое решение уравнения (1) имеет не более одного нуля на $[t_0, \infty)$.

Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства видно, что утверждение теоремы 1 справедливо также при следующем условии

$$p(t) + \frac{F(y, y, t)}{y} \leqslant 0, \qquad t \geqslant t_0 \tag{16}$$

Доказательство теоремы 2. На основании утверждения А. Винтнера [6] (см. утверждение (β^*), стр. 370) заключаем, что при выполнении условия 1 теоремы 2 каждое решение уравнения первого приближения (10) имеет не более одного нуля на полуоси $t \geqslant t_0$. Если выполняется условие 2 теоремы 2, то в соответствии с утверждением теоремы 9 каждое решение уравнения (1) имеет на полуоси не больше двух нулей.

Доказательство теоремы 3 ведется, как и выше, на основании теоремы 9. Если выполняются условия (5) теоремы 3, то в соответствии с утверждением А. Ю. Левина [3] каждое решение уравнения первого приближения (10) имеет на полуоси конечное множество нулей. Выполнение условия (2) гарантирует, что все решения нелинейного уравнения (1) имеют на полуоси конечное множество нулей (являются неосциллирующими).

Теорема 4 вытекает из утверждения А. Винтнера [6] (стр. 372—373) и теоремы 9.

Доказательство теоремы 5. Предположим, что выполняются условия (8) и (9) теоремы 5, но каждое решение уравнения (1) является неосциллирующим. Тогда в силу теоремы 4 о сравнении [7] из выполнения условий (8) и (9), должна следовать неосцилляция всех решений уравнения

$$x'' + cx = 0, \quad c\text{—const} > 0,$$

что невозможно. Это доказывает теорему.

Доказательство теоремы 6. Следуя В. Ляйтону [4], введем в рассмотрение дифференциальную систему

$$\begin{cases} u'' + (kt + m)\, u = 0, \\ u(a) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

где $v = kt + m$ — уравнение хорды, соединяющей точки $[a, p(a)]$ и $[b, p(b)]$. Если выполняется условие (11), то решение $u(t)$ системы (17) обращается в нуль на интервале (a, b) (см. 4, стр. 300—302). Так как $p(t) > 0$ — вогнута книзу, то на основании классической теоремы о сравнении Штурма заключаем, что решение $x(t)$ уравнения (10), обращающееся в нуль при $t = a$, обратится снова в нуль на интервале (a, b). Выполнение условия 4 теоремы 6 гарантирует (как это следует из теоремы о сравнении 9 [2]), что решение $y(t)$ $(y(a) = 0)$ нелинейного уравнения (1) также обращается в нуль на интервале (a, b).

Доказательство теоремы 7. Применяя теорему 3 В. Ляйтона [4] к уравнению первого приближения (10), заключаем, что при выполнении условий 1—3 теоремы 7 решение $x(t)$, обращающееся в нуль при $t = a$, обратится снова в нуль в интервале $(a, b]$. Если выполняется дополнительное условие 4, то из теоремы 9 о сравнении следует, что решение $y(t)$ уравнения (1), обращающееся в нуль при $t = a$, обратится снова в нуль в интервале $(a, b]$.

Теорема 8. вытекает из теоремы А. Гелбрайса [5] и теоремы 7 [2].

ЛИТЕРАТУРА:

1. В. Н. Шевело, Об исследовании осцилляторных свойств решений нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n по первому приближению, Бюллетень международного конгресса математиков, № 8, М., 1966, стр. 4.

2. В. Н. Шевело, Н. В. Варех, О некоторых свойствах решений нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка, в сборнике: Математическая физика, в. 3, изд-во «Наукова Думка», К., 1967, стр. 237—247.

3. А. Ю. Левин, Интегральный критерий неосцилляционности для уравнения $\ddot{x}+q(t)x=0$. УМН 20, № 2 (1965), стр. 244—246.
4. Leighton W., on the zeros of solutions of a cesond order linear differensial equations, Joutnal de Math. pur. appl., 44, 3 (1965), 293—300.
5. Galbraith A. S., On the zeros of solutions of ordinary differential equations of the second order, Proc. Amer. Soc., 17, 2 (1966).
6. Wintner A., On the non—existence of conjugate potnts, Amer. Joul. Math., 73, 2 (1951), 368-380.
7. В. Н. Шевело, В. Г. Штелик, Некоторые вопросы осцилляции решений нелинейных неавтономных уравнений второго порядка, ДАН, 149, 2(1963), 276—279.
8. Szmydt Z., Sur l'allure asumptotique des integrales des certeins systems èquations differentelles non lineaires, Ann. Polon. Mat. 1, 2, (1955), 253—276.
9. Hartman P., Wintner A., Asymptotic integrations of nonlinear differential, equations, Amer. J. Math., 77 (1955), 692—724.
10. Olech C., On the asymptotce bihavior of the solutions of a system of ordinary non—linear differential equations, Bull. Acad. Polon. Sci. cl. III, 4 (1960), 555—561.
11. Brauer F., Asymptotic equivalence and asymptotic bihavior of linear systems, Michigan J. Math., 9 (1962), 33—43.
12. Waltman P., On the asymptotic behavior of solutions a nonlinear equation, Proc. Amer. Math. Soc., 15, 6, (1964), 918—923.
13. И. Т. Кигурадзе, Асимптотические свойства решений одного нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена-Фаулера, Изв. АН СССР, 29 (1965), 965—986.
14. Onuchic N., Asymptotic relationships at infinity between the solutdons of two systems of ordinary differential equations, J. Diff. Equat, 3, 1 (1967), 47—58.

О ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

В. Б. ГРИШИН.

Пусть $f(x, y)$ —непрерывная 2π—периодическая функция относительно каждой из переменных x и y. С помощью матрицы

$$\Lambda=\{\lambda_{k,l}^{(m,n)}\}\ k=0,1,\dots,m+1;\quad l=0,\dots,n+1;$$

$$m,n=0,1,2,\dots;\quad \lambda_{0,0}^{(m,n)}=1,\quad \lambda_{m+1,l}^{(m,n)}=0,\quad l=0,1,\dots,n+1;$$

$$\lambda_{k,n+1}^{(m,n)}=0,\quad k=0,1,\dots,m+1)$$