3. А. Ю. Левин, Интегральный критерий неосцилляционности для уравнения $\ddot{x}+q(t)x=0$. УМН 20, № 2 (1965), стр. 244—246.

4. Leighton W., on the zeros of solutions of a cesond order linear differensial equations, Joutnal de Math. pur. appl., 44, 3 (1965), 293—300.

5. Galbraith A. S., On the zeros of solutions of ordinary differential equations of the second order, Proc. Amer. Soc., 17, 2 (1966).

6. Wintner A., On the non—existence of conjugate potnts, Amer. Joul. Math., 73, 2 (1951), 368-380.

7. В. Н. Шевело, В. Г. Штелик, Некоторые вопросы осцилляции решений нелинейных неавтономных уравнений второго порядка, ДАН, 149, 2(1963), 276—279.

8. Szmydt Z., Sur l'allure asumptotique des integrales des certeins systems èquations differentelles non lineaires, Ann. Polon. Mat. 1, 2, (1955), 253—276.

9. Hartman P., Wintner A., Asymptotic integrations of nonlinear differential, equations, Amer. J. Math., 77 (1955), 692—724.

10. Olech C., On the asymptotce bihavior of the solutions of a system of ordinary non—linear differential equations, Bull. Acad. Polon. Sci. cl. III, 4 (1960), 555—561.

11. Brauer F., Asymptotic equivalence and asymptotic bihavior of linear systems, Michigan J. Math., 9 (1962), 33—43.

12. Waltman P., On the asymptotic behavior of solutions a nonlinear equation, Proc. Amer. Math. Soc., 15, 6, (1964), 918—923.

13. И. Т. Кигурадзе, Асимптотические свойства решений одного нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена-Фаулера, Изв. АН СССР, 29 (1965), 965—986.

14. Onuchic N., Asymptotic relationships at infinity between the solutdons of two systems of ordinary differential equations, J. Diff. Equat, 3, 1 (1967), 47—58.

О ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

В. Б. ГРИШИН.

Пусть $f(x, y)$ —непрерывная 2π—периодическая функция относительно каждой из переменных x и y. С помощью матрицы

$$\Lambda = \{\lambda_{k,l}^{(m,n)}\}\ k=0,1,\dots,m+1;\quad l=0,\dots,n+1;$$

$$m,n=0,1,2,\dots;\quad \lambda_{0,0}^{(m,n)}=1,\quad \lambda_{m+1,l}^{(m,n)}=0,\quad l=0,1,\dots,n+1;$$

$$\lambda_{k,n+1}^{(m,n)}=0,\quad k=0,1,\dots,m+1)$$

каждой функции $f(x, y)$ поставим в соответствие тригонометрические полиномы

$$U_{m,n}(f; x, y, \Lambda) = \frac{a_{0,0}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{m} \lambda_{k,0}^{(m,n)}(a_{k,0}\cos kx +$$

$$+ b_{k,0}\sin kx) + \sum_{l=1}^{n} \lambda_{0,l}^{(m,n)}(a_{0,l}\cos l y + c_{0,l}\sin l y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \lambda_{k,l}^{(m,n)}(a_{k,l}\cos kx\cos l y + b_{k,l}\sin kx\cos ly +$$

$$+ c_{k,l}\cos kx\sin l y + d_{k,l}\sin kx\sin l y), \qquad (1)$$

где $a_{k,l}$, $b_{k,l}$, $c_{k,l}$, $d_{k,l}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$.

Рассмотрим вопрос об условиях, которым должны удовлетворять коэффициенты $\lambda_{k,l}^{(m,n)}$, для того чтобы равномерно для всех точек (x, y) и для любой функции $f(x, y) \in C_{[2\pi, 2\pi[}$ выполнялось равенство

$$\lim_{m,n\to\infty} U_{m,n}(f; x, y, \Lambda) = f(x, y). \qquad (2)$$

В силу общих теорем функционального анализа условие (2) эквивалентно совокупности следующих двух условий

$$\lim_{m,n\to\infty} \lambda_{k,l}^{(m,n)} = 1, \qquad (l, k = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (3)$$

$$\| U_{m,n}\|_c = \sup_{|f|\leqslant 1} | U_{m,n}(f; x, y, \Lambda) | =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\left| \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,0}^{(m,n)} \cos kx + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} \lambda_{0,l}^{(m,n)} \cos l y +\right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \lambda_{k,l}^{(m,n)}\cos kx\cos l y \right| dx\,dy \leqslant M, \qquad (4)$$

где M — абсолютная постоянная. Положим

$$\Delta_k \lambda_{k,l}^{(m,n)} = \lambda_{k,l}^{(m,n)} - \lambda_{k,l}^{(m,n)}, \quad \Delta_l \lambda_{k,l}^{(m,n)} = \lambda_{k,l}^{(m,n)} - \lambda_{k,l+1}^{(m,n)},$$

$$\Delta_{k,l}^2 \lambda_{k,l}^{(m,n)} = \lambda_{k,l}^{(m,n)} - \lambda_{k+1,l}^{(m,n)} - \lambda_{k,l+1}^{(m,n)} + \lambda_{k+1,l+1}^{(m,n)},$$

$$\Delta_{kkll}^4 \lambda_{k,l}^{(m,n)} = \lambda_{k,l}^{(m,n)} + \lambda_{k,l+1}^{(m,n)} + \lambda_{k+2,l}^{(m,n)} + \lambda_{k+2,l+2}^{(m,n)} - 2\,(\lambda_{k,l+1}^{(m,n)} +$$

$$+ \lambda_{k+1,l}^{(m,n)} + \lambda_{k+1,l+2}^{(m,n)} + \lambda_{k+2,l+2}^{(m,n)}) + 4\,\lambda_{k+1,l+1}^{(m,n)};$$

$$(k = 0, 1, \ldots, m; \quad l = 0, 1, \ldots, n).$$

Имеет место

Теорема 1. Если матрица $\{\lambda_{k,l}^{(m,n)}\}$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} (\Delta_{k,l}^2 \lambda_{k,l}^{(m,n)})^2 = 0\left(\frac{1}{mn}\right), \tag{5}$$

$$\lim_{m,n\to\infty} \lambda_{k,l}^{(m,n)} = 1, \quad (k, l = 0, 1, \ldots), \tag{6}$$

то последовательность линейных операторов $U_{m,n}(f;\, x, y,\, \Lambda)$ при $m, n \to \infty$ равномерно сходится к функции $f(x, y) \in C_{[2\pi,\, 2\pi]}$.

Доказательство. Обозначим

$$L_{m,n}(x, y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=l}^{m} \lambda_{k,0}^{(m,n)} \cos kx + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \lambda_{0,l}^{(m,n)} \cos ly +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \lambda_{k,l}^{(m,n)} \cos kx \cos ly.$$

Путем несложных преобразований получим

$$|\, L_{m,n}^2(x, y)\, | = \frac{1}{4} \left| \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=1}^{n} \lambda_{|m-k|,\,|n-l|}^{(m,n)}\, e^{ikx}\, e^{ily} \right|.$$

Применяя метод математической индукции, находим

$$L_{m,n}^2(x, y) = \frac{1}{16} \Big(A_{0,0} + 2 \sum_{k=1}^{2m} A_{k,0} \cos kx + 2 \sum_{l=1}^{n} A_{0,l} \cos ly +$$

$$+ 4 \sum_{k=1}^{2m} \sum_{l=1}^{2n} A_{k,l} \cos kx \cos ly \Big),$$

где $$A_{k,\,l}=\sum_{p=0}^{2m-k}\sum_{s=0}^{2n-l}\lambda^{(m,\,n)}_{|m-p|,\,|n-s|}\,\lambda^{(m,\,n)}_{|m-p-k|,\,|n-s-l|},$$

$$k=0,1,\ldots,2m;\quad l=0,1,\ldots,2n.$$

Представим $\|U_{m,\,n}\|_c$ следующим образом

$$\|U_{m,\,n}\|_c=\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2m+1}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n+1}}|L_{m,\,n}(x,y)|\,dx\,dy+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2m+1}}\int\limits_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\pi}\sqrt{L^2_{m,\,n}(x,y)}\,dxdy+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2m+1}}^{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n+1}}\times$$

$$\times\sqrt{L^2_{m,\,n}(x,y)}\,dxdy+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2m+1}}^{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2p+1}}^{\pi}\sqrt{L^2_{m,\,n}(x,y)}\,dxdy=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4. \tag{7}$$

Рассмотрим I_4. Имеем

$$I_4\leqslant\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2m+1}}^{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\pi}\frac{\pi^2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}{xy}\sqrt{L^2_{m,\,n}(x,y)}\,dxdy=$$

$$=4\int\limits_{\frac{\pi}{2m+1}}^{\pi}\frac{\sin x/2}{x}\left[\int\limits_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\pi}\sqrt{\frac{1}{y^2}\left(\sin^2\frac{y}{2}L_{m,\,n}(x,y)\right)}\,dy\right]dx. \tag{8}$$

Обозначим

$$F(x)=\left[\int\limits_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\pi}\sqrt{\frac{1}{y^2}\left(\sin^2\frac{y}{2}L^2_{m,\,n}(x,y)\right)}\,dy\right].$$

В силу неравенства Буняковского получаем

$$F(x)\leqslant\left(\int\limits_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\pi}\frac{1}{y^2}\,dy\int\limits_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\pi}\sin^2\frac{y}{2}L^2_{m,\,n}(x,y)\,dy\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\left\{n\left[(A_{0,\,0}-A_{0,\,1})+2\sum_{k=1}^{2m}(A_{k,\,0}-A_{k,\,1})\cos kx\right]\right\}^{1/2}.$$

Учитывая теперь (8), приходим к неравенству

$$I_4 \leqslant \int\limits_{\frac{\pi}{2m+1}}^{\pi} \frac{\sin x/2}{x} \Big\{ n \Big[(A_{0,0} - A_{0,1}) + $$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{2m} (A_{k,0} - A_{k,1}) \cos kx \Big] \Big\}^{1/2} dx \leqslant \Big\{ n \int\limits_{\frac{\pi}{2m+1}}^{\pi} \frac{1}{x^2} dx \int\limits_0^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} \times$$

$$\times \Big[(A_{0,0} - A_{0,1}) + 2 \sum_{k=1}^{2m} (A_{k,0} - A_{k,1}) \cos kx \Big] dx \Big\}^{1/2} =$$

$$= \sqrt{mn (A_{0,0} - A_{0,1} - A_{1,0} + A_{1,1})}. \qquad (9)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего равенства

$$A_{0,0} - A_{0,1} - A_{1,0} + A_{1,1} = \sum_{p=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} (\Delta^2_{p,s} \lambda^{(m,n)}_{p,s})^2. \qquad (10)$$

Поэтому, в силу (5), (9) и (10)

$$I_4 = 0(1). \qquad (11)$$

Перейдем теперь к оценке слагаемого I_2 из (7). Представим $L_{m,n}(x, y)$ следующим образом

$$L_{m,n}(x, y) = \frac{1}{2} \mu_0(x) + \sum_{l=1}^{n} \mu_l(x) \cos l y,$$

где

$$\mu_l(x) = \frac{1}{2} \lambda^{(m,n)}_{0,l} + \sum_{k=1}^{m} \lambda^{(m,n)}_{k,l} \cos kx, \quad (l = 0, 1, \dots, n).$$

Имеет место равенство

$$L^2_{m,n}(x, y) = \frac{1}{2} \Big(B_0(x) + 2 \sum_{l=1}^{2n} B_l(x) \cos l y \Big),$$

где

$$B_l(x) = \sum_{s=0}^{2n-l} \mu_{|n-s|}(x) \mu_{|n-s-l|}(x), \quad l = 0, 1, \dots, 2n.$$

Учитывая результаты работы Г .А. Фомина [1], получаем неравенство

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\pi} \sqrt{L^2_{m,n}(x, y)}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2} \sqrt{n\,[B_0(x) - B_1(x)]} = \frac{\pi}{2} \sqrt{n \sum_{l=0}^{n} (\Delta_l \mu_l (x))^2}\,. \qquad (12)$$

Имеет место равенство

$$\Delta_l \mu_l (x) = \sum_{k=0}^{m} \Delta^2_{k,l} \lambda^{(m,n)}_{k,l} D_k (x), \qquad (13)$$

где $D_k(x)$ — ядро Дирихле. Поэтому, в силу (12) и (13)

$$I_2 \leqslant \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2m+1}} \left\{ n \sum_{l=0}^{n} \left[\sum_{k=0}^{m} \Delta^2_{k,l} \lambda^{(m,n)}_{k,l} D_k (x) \right]^2 \right\}^{1/2} dx.$$

Применяя к этому интегралу неравенство Буняковского, получаем

$$I_2 \leqslant \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{n\pi}{2m+1} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2m+1}} \sum_{l=0}^{n} \left[\sum_{k=0}^{m} \Delta^2_{k,l} \lambda^{(m,n)}_{k,l} D_k (x) \right]^2 dx \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{n\pi}{2m+1} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} (\Delta^2_{k,l} \lambda^{(m,n)}_{k,l})^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2m+1}} \sum_{k=0}^{m} D_k^2 (x)\, dx \right\}^{1/2}.$$

Далее, так как

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2m+1}} \frac{\sin^2 (2k+1) \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}\, dx \leqslant \frac{\pi}{4} \frac{(2k+1)^2}{2m+1}$$

то

$$I_2 \leqslant \left\{ n(m+1) \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} (\Delta^2_{k,l} \lambda^{(m,n)}_{k,l})^2 \right\}^{1/2} = O(1)$$

в силу (5). Аналогично можно показать также, что

$$I_3 = O(1).$$

Рассмотрим, наконец, слагаемое I_1. Применяя к $L_{m,n}(x, y)$ дважды преобразование Абеля, находим

$$L_{m,n}(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \Delta^2_{k,l} \lambda^{(m,n)}_{k,l} S_{k,l}(x, y),$$

где

$$S_{k,l}(x, y) = \frac{\sin(2k+1)\frac{x}{2} \sin(2l+1)\frac{y}{2}}{4\sin\frac{x}{2} \sin\frac{y}{2}} = D_k(x) D_l(y).$$

Тогда для I_1 получаем следующую оценку

$$I_1 \leqslant \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} |\Delta^2_{k,l} \lambda^{(m,n)}_{k,l}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left[mn \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} (\Delta^2_{k,l} \lambda^{(m,n)}_{k,l})^2 + 1 \right] = O(1).$$

Таким образом, установлено, что все слагаемые I_1—I_4 есть величины порядка $O(1)$. Но тогда

$$\| U_{m,n} \|_c = O(1).$$

Из этого соотношения и условия (6) и следует теорема.

Теорема 2. Для всех m и n ($m, n = 1, 2, \ldots$) имеет место соотношение

$$\| U_{m,n} \|_c \geqslant \frac{\sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} (\Delta^2_{k,l} \lambda^{(m,n)}_{k,l})^2}{4 \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} |\Delta^4_{kkll} \lambda^{(m,n)}_{k,l}|}.$$

Доказательство. Применяя преобразование Абеля к $L_{m,n}(x, y)$ получаем

$$L_{m,n}(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \Delta^4_{kkll} \lambda^{(m,n)}_{k,l} \frac{\sin^2\frac{k+1}{2} x \sin^2\frac{l+1}{2} y}{4\sin^2\frac{x}{2} \sin^2\frac{y}{2}}.$$

Поэтому

$$(1-\cos x)(1-\cos y)\,|\,L_{m,n}(x,y)\,| \leqslant \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} |\,\Delta^{4}_{kkll}\lambda^{(m,n)}_{k,l}\,| .$$

и, следовательно,

$$\|\,U_{m,n}\,\|_c \geqslant \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{(1-\cos x)(1-\cos y)\,L^2_{m,n}(x,y)}{\sum\limits_{k=0}^{m}\sum\limits_{l=0}^{n} |\,\Delta^{4}_{kkll}\lambda^{(m,n)}_{k,l}\,|}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=0}^{m}\sum\limits_{l=0}^{n} (\Delta^{2}_{k,l}\lambda^{(m,n)}_{k,l})^2}{4\sum\limits_{k=0}^{m}\sum\limits_{l=0}^{n} |\,\Delta^{4}_{kkll}\lambda^{(m,n)}_{k,l}\,|} .$$

Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы 2 следует, что если

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} |\,\Delta^{4}_{kkll}\lambda^{(m,n)}_{k,l}\,| = 0\left(\frac{1}{mn}\right),$$

то условие (5) является и необходимым для выполнения соотношения (4).

Установленные теоремы являются распространением на случай функций двух переменных соответствующих результатов Г. А. Фомина [1].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Г. А. Фомин, О линейных методах суммирования рядов Фурье, Мат. сб., т. 65, вып. 1, 1964.