ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕОДОРСЕНА

И. Г. ГУБАРЬ.

В приложениях математики достаточно часто приходится сталкиваться с задачей конформного отображения круга на односвязную область. К этой задаче приводятся значительное количество проблем теории упругости, гидро и аэромеханики, теории фильтрации и других наук. Одним из методов решения задачи конформного отображения является метод интегральных уравнений. Наиболее часто используется интегральное уравнение Теодорсена (1).

В данной работе рассматриваются некоторые итерационные графо-аналитические методы решения этого уравнения.

Пусть в плоскости w задана односвязная, ограниченная, звездная относительно начала координат, область D, ограниченная кусочно-гладким контуром L. В силу звездности D, существует однозначная функция $r=r(\psi)$, представляющая собой уравнение контура L. Так как $r(\psi)>0$, то, не ограничивая общности, можно считать, что $r(\psi)>1$. Требуется определить аналитическую и однолистную в единичном круге функцию $w=f(z)$, удовлетворяющую условиям $f(0)=0$ и $Im f(1)=0$, которая осуществляет конформное отображение единичного круга $|z|<1$ на область D.

Из аналитичности $f(z)$ и условий нормировки, ее можно представить в виде

$$f(z)=z\sum_{k=0}^{\infty}(a_к+ib_к)z^к=z\varphi(z). \tag{1}$$

Так как $f(z)$ однолистна в круге $|z|<1$ и $r(\psi)<M$, то функция $\gamma(z)=\ln\varphi(z)$ будет аналитической при $|z|<1$ и ограниченной по модулю при $|z|=1$. Если

$$\gamma(z)=\Sigma(c_к+id_к)z^к \text{ и } \gamma(e^{i\varphi})=\alpha(\varphi)+i\beta(\varphi), \text{ то}$$

$$\alpha(\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}c_к\cos k\varphi-d_к\sin k\varphi,$$

$$\beta(\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}c_к\sin k\varphi+d_к\cos k\varphi. \tag{2}$$

Учитывая (1), получим, обозначив $\ln r(\psi)$ через $\rho(\psi)$,

$$\alpha(\varphi) = \rho[\varphi + \beta(\varphi)]. \tag{3}$$

Используя аналитичность $\gamma(z)$ и условия (2), будем иметь

$$\beta(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(t) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - t}{2} dt. \tag{4}$$

Объединяя (3) и (4), окончательно получим уравнение Теодорсена

$$\beta(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho[t + \beta(t)] \operatorname{ctg} \frac{\varphi - t}{2} dt. \tag{5}$$

Интегралы в соотношениях (4) и (5) необходимо понимать в смысле главного значения по Коши. Соотношение (5) часто записывают в виде

$$\beta(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\rho[t + \beta(t)] - \rho[\varphi + \beta(\varphi)]\} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - t}{2} dt$$

так как $\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - t}{2} dt = 0$ в смысле главного значения.

Для геометрической интерпретации приближенных методов решения уравнения Теодорсена $\rho(\psi)$ удобно рассматривать как полярное уравнение вспомогательного контура Г. Тогда функция $\gamma(z)$ преобразует единичную окружность в Г. Легко видеть, что из условий $Im f(1) = 0$ следует $\beta(0) = 0$.

Рассмотрим некоторые методы решения уравнения (5) или, что то же самое, системы уравнений (3) и (4). Пусть известно приближенное решение задачи $\alpha_n(\varphi)$. Используя (4), определим $\beta_n(\varphi)$. Построим точки $M_n(\varphi)$ с полярными координатами $[\alpha_n(\varphi), \varphi + \beta_n(\varphi)]$. Эти точки, за исключением отдельных значений φ, будут лежать вне контура Г. Для определения $\alpha_{n+1}(\varphi)$ можно использовать несколько способов сноса точек $M_n(\varphi)$ на контур Г.

1. Снос точки по радиусу.

Очевидно, в этом случае для $\alpha_{n+1}(\varphi)$ будем иметь формулу

$$\alpha_{n+1}(\varphi) = \rho[\varphi + \beta_n(\varphi)]. \tag{6}$$

Итерационная формула (6) была предложена Теодорсеном и часто называется методом простой итерации. Виттинг ([2]) показал, что процесс (6) сходится при $\max|\rho'|<1$. Однако практика показывает, что это условие является достаточным, но не является необходимым. В качестве начального приближения выбирают $\rho(\varphi)$. Так как точка M_{n+1} лежит на окружности, то ясно, что этот метод дает хорошие результаты для областей близких к кругу. Свойства контура влияют на величину β_{n+1}, а порядок отклонения $M_{n+1}(\varphi)$ от контура определяется формулой (6).

II. Снос точки по нормали к контуру.

Имея M_n мы можем найти основание нормали проведенной из точки $M_n(\varphi)$ на контур Г. При этом приходится решать трансцедентное уравнение. Чтобы избежать решения этой задачи, будем искать основание перпендикуляра, опущенного из точки $M_n(\varphi)$ на касательную к контуру в точке с углом $\varphi+\beta_n(\varphi)$. Для вывода формулы, определяющей процесс, воспользуемся тем, что $\operatorname{tg}(n,\rho)=\rho':\rho$, где n — направление внешней нормали. В качестве α_{n+1} берем расстояние от начала координат до основания перпендикуляра. После несложных преобразований получим

$$\alpha_{n+1}(\varphi)=\rho_n\sqrt{\frac{\rho_n^2+(\alpha_n:\rho_n)^2\,\rho_n'^2}{\rho_n^2+\rho_n'^2}}, \tag{7}$$

где $\rho_n=\rho[\varphi+\beta_n(\varphi)]$, $\rho_n'=\rho'_\varphi[\varphi+\beta_n(\varphi)]$.

Если α_n достаточно близко к ρ_n то формулу (7) можно упростить

$$\alpha_{n+1}=\rho_n\left[1+\frac{\rho_n'^2(\alpha_n^2-\rho_n^2)}{2\rho_n^2(\rho_n^2+\rho_n'^2)}\right]. \tag{8}$$

Процесс (7) учитывает более полно строение контура, чем процесс (6), поэтому можно ожидать, что либо скорость сходимости будет больше, либо процесс будет менее чувствительным к выбору начального приближения. К сожалению эти вопросы остаются открытыми как и в методе Мелентьева.

Введем обозначения: $\max[\rho'^2:(\rho^2+\rho'^2)]=M_1$, $\max[|\rho'|\rho^2:(\rho^2+\rho'^2)]=M_2$.

Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. Если $\rho(\psi)=\rho(-\psi)$ и $M_1+M_2<1$, то процесс, определяемый формулой (8), сходится при достаточно хорошем начальном приближении.

Обозначим $\alpha_n=\alpha(\varphi)+\xi_n(\varphi)$, $\beta_n=\beta(\varphi)+\eta_n(\varphi)$. Пусть $\alpha_n(\varphi)$ выбрано настолько близким к решению, что величинами ξ_n^2 и η_n^2

можно пренебречь. Тогда, заменив в формуле (8) α_{n+1}, α_n, β_n, ρ_n, ρ_n' их разложениями с учетом малых первого порядка и проведя несложные преобразования, будем иметь

$$\xi_{n+1} = \frac{\xi_n \rho'^2 + \rho^2 \rho' \eta_n}{\rho^2 + \rho'^2}. \tag{9}$$

По условию теоремы $\rho(\psi) = \rho(-\psi)$ следовательно, если $\alpha_0(\varphi) = \alpha_0(-\varphi)$, то $\alpha_n(\varphi) = \alpha_n(-\varphi)$ для любого n. С другой стороны, в силу принципа симметрии, $\alpha(\varphi) = \alpha(-\varphi)$. Следовательно $\xi_n(\varphi) = \xi_n(-\varphi)$ и $\eta_n(\varphi) = -\eta_n(-\varphi)$. Так как по условию $\xi_n(\varphi)$ и $\eta_n(\varphi)$ являются сопряженными функциями, то из равенства Парсеваля, записанных для этих функций, получим

$$\int_0^{2\pi} \eta_n^2(\varphi)\, d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi} \xi_n^2(\varphi)\, d\varphi. \tag{10}$$

Возвышая обе части равенства (9) в квадрат и интегрируя, получим

$$\int_0^{2\pi} \xi^2_{n+1}(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\rho'^4}{(\rho^2 + \rho'^2)^2} \xi_n^2(\varphi)\, d\varphi +$$

$$+ 2 \int_0^{2\pi} \frac{\rho'^3 \rho^2}{(\rho^2 + \rho'^2)^2} \xi_n \eta_n\, d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{\rho'^2 \rho^4}{(\rho^2 + \rho'^2)^2} \eta_n^2\, d\varphi.$$

Применив неравенство Коши-Буняковского, с учетом (10), будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \xi^2_{n+1}(\varphi)\, d\varphi \leqslant (M_1 + M_2)^2 \int_0^{2\pi} \xi_n^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Следовательно, если $M_1 + M_2 < 1$, то процесс сходится в среднем. Теорема доказана.

III. Аналог метода Ньютона.

Пусть $\alpha_n(\varphi)$ и $\beta_n(\varphi)$ известны и выбраны достаточно близкими к решению. Определим теперь $\alpha_{n+1}(\varphi)$ по формуле

$$\alpha_{n+1}(\varphi) = \rho\,[\varphi + \beta_n(\varphi)] + \rho'\,[\varphi + \beta_n(\varphi)]\,[\beta_{n+1}(\varphi) - \beta_n(\varphi)] \tag{11}$$

Введем обозначения:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \xi; \quad \beta_{n+1} = \beta_n + \eta; \quad M(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho_n'^2}};$$

$$N(\varphi) = -\frac{\rho_n'}{\sqrt{1+\rho'^2}} \quad P(\varphi) = \frac{\rho_n - \alpha_n}{\sqrt{1+\rho_n'^2}}. \tag{12}$$

Соотношение (11) запишется в виде

$$M(\varphi)\,\xi(\varphi) + N(\varphi)\,\eta(\varphi) = P(\varphi). \tag{13}$$

Учитывая сопряженность α_n и β_n, для определения ξ получаем задачу Гильберта. Вспоминая, что $\operatorname{tg}(n, r) = \rho'$, соотношения (12) можно упростить. Будем иметь

$$M(\varphi) = \cos\delta, \quad N(\varphi) = -\sin\delta, \quad \delta = (n, r).$$

Аргументом δ является выражение $\varphi + \beta_n(\varphi)$. Следовательно (13) можно записать в виде

$$\xi\cos\delta_1(\varphi) - \sin\delta_1(\varphi)\,\eta = (\rho_n - \alpha_n)\cos\delta_1(\varphi) = g(\varphi). \tag{13a}$$

Если $\xi + i\eta = f$, то $\xi\cos\delta_1 - \eta\sin\delta_1 = \operatorname{Re}[e^{i\delta_1(\varphi)} f]$ и, следовавыражение (13a) можно записать в виде

$$\operatorname{Re}[e^{i\delta_1(\varphi)} f] = g(\varphi). \tag{14}$$

Так как D является звездной областью, то $\delta_1(\varphi)$ будет однозначной функцией и, следовательно, ее можно рассматривать как предельное значение вещественной части аналитической в круге функции $\Phi(z)$. Будем обозначать

$$S[k(\varphi)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [k(t) - k(\varphi)]\operatorname{ctg}\frac{\varphi - t}{2}\,dt. \tag{15}$$

Тогда

$$\operatorname{Im}\Phi(e^{i\alpha}) = S[\delta_1(\varphi)].$$

Рассмотрим аналитическую в круге функцию $f\exp[i\Phi(z)]$.) На единичной окружности ее вещественная часть определится равенством

$$\exp[-S[\delta_1(\varphi)]]\operatorname{Re}[(\xi + i\eta)\exp[i\delta_1(\varphi)]].$$

Используя (14) и применяя формулу Шварца, получим

$$f(z) = e^{-i\Phi(z)}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\,e^{-S[\delta_1(t)]}\,\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt + ic\right\}. \tag{16}$$

Устремляя $|z|$ к 1 и отделяя в (16) вещественную и мнимые части, будем иметь для $\xi(\varphi)$ и $\eta(\varphi)$ выражения

$$\xi(\varphi)=\exp[S[\delta_1(\varphi)]]\{\exp[-S[\delta_1(\varphi)]](\rho_n-\alpha_n)\cos^2\delta_1(\varphi)+$$
$$+\sin\delta_1(\varphi)S[(\rho_n-\alpha_n)\cos\delta_1(\varphi)\exp[-S[\delta_1(\varphi)]]+c\sin\delta_1(\varphi)\}$$
$$\eta(\varphi)=e^{S[\delta_1(\varphi)]}\{\cos\delta_1[S[(\rho_n-\alpha_n)\cos\delta_1 e^{-S[\delta_1]}]+c]-$$
$$-\sin\delta_1 e^{-S[\delta_1]}(\rho_n-\alpha_n)\cos\delta_1\}.$$

Для определения c будем считать, что $\beta_0(0)=0$, $\eta_n(0)=0$, $\alpha_n(0)=\rho(0)$.

Определим c из условия $\eta(0)=0$

$$c=-S[(\rho_n-\alpha_n)\cos\delta_1\exp[-S[\delta_1]]]|_{\varphi=0}.$$

Следовательно $\xi(\varphi)$ и $\eta(\varphi)$ принимают вид

$$\xi(\varphi)=(\rho_n-\alpha_n)\cos^2\delta_1+\exp[S[\delta_1(\varphi)]]\sin\delta_1(\varphi)\{S[(\rho_n-$$
$$-\alpha_n)\cos\delta_1\exp[-S[\delta_1(\varphi)]]-S[(\rho_n-\alpha_n)\cos\delta_1\exp[-S[\delta_1]]]|_{\varphi=0} \quad (17)$$
$$\eta(\varphi)=e^{S[\delta_1(\varphi)]}\{\cos\delta_1\{S[(\rho_n-\alpha_n)\cos\delta_1 e^{-S[\delta_1]}]-$$
$$-S[(\rho_n-\alpha_n)\cos\delta_1 e^{-S[\delta_1]}]|_{\varphi=0}\}-\sin\delta_1 e^{-S[\delta_1]}\cos\delta_2(\rho_1-\alpha_n)\}. \quad (18)$$

Таким образом

$$\alpha_{n+1}=\alpha_n+\cos^2\delta_1(\rho_n-\alpha_n)+e^{S[\delta_1(\varphi)]}\sin\delta_1(\varphi)\{S[(\rho_n-$$
$$\alpha_n)e^{-S[\delta_1]}\cos\delta_1]-S[(\rho_n-\alpha_n)\cos\delta_1 e^{-S[\delta_1]}]|_{\varphi=0}\}. \quad (19)$$

Очевидно $\alpha_{n+1}(0)=\rho(0)$, $\beta_{n+1}(0)=0$, следовательно условия для определения c при переходе от n к $n+1$ выполняются. Заменив в (19) $\cos\delta_1$ и $\sin\delta_1$ выражениями через $\rho'[\varphi+\beta(\varphi)]$ получим равенство, содержащее только функцию $\rho(\psi)$ и ее производную.

Для малых n целесообразно упростить формулу (19), определив α_{n+1} по формуле

$$\alpha_{n+1}=\alpha_n+\frac{\rho_n-\alpha_n}{1+\rho_n'^2}. \quad (20)$$

Обозначив $\max[|\rho'|:(1+\rho'^2)]=M$ легко доказать по аналогии с теоремой 1.

Теорема 2. Если $\rho(\psi)=\rho(-\psi)$ и $M(1+\max|\rho'|)<1$, то процесс, определяемый формулой (20), сходится в среднем.

Упростим выражение (19). Для этого раскроем символ $S[\delta_1(\varphi)]$. Будем рассматривать выражение $\delta[\varphi+\beta(\varphi)]$, соответствующее точному значению $\alpha(\varphi)$. Легко видеть, что $\delta[\varphi=\beta(\varphi)]=$ $=\beta(\varphi) - \operatorname{Arg} w'(e^{i\varphi})$. Следовательно

$$S[\delta(\varphi+\beta(\varphi)] = -\rho[\varphi+\beta(\varphi)+\ln\sqrt{1+\rho'^2}(1+\beta')+$$
$$+\rho[\varphi+\beta(\varphi)] = \ln\sqrt{1+\rho'^2}\,\frac{\alpha'(\varphi)}{\rho'[\varphi+\beta(\varphi)]}.$$

Таким образом $S[\delta_1(\varphi)] \approx \ln\sqrt{1+\rho'^2}\,\dfrac{\alpha_n'}{\rho_n'}$. Подставив полученное выражение в (19), будем иметь

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{\rho_n - \alpha_n}{1+\rho_n'^2} +$$
$$+\alpha_n'\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho'(t+\beta_n(t))\,[\rho(t+\beta_n(t))-\alpha_n(t)]\sin\varphi}{\alpha_n'(t)\,[1+\rho'^2(t+\beta_n(t))\sin\frac{t}{2}\sin\frac{\varphi-t}{2}}\,dt. \quad (19)$$

Замечания 1. В случае табличного задания контура, уравнение (5), без предварительного определения контура, теряет смысл. Однако, перейдя от $\beta(\varphi)$ к $\varphi(\psi)$ получим

$$\varphi(\psi) = \psi - \int_0^{2\pi}\ln r[t]\operatorname{ctg}\frac{\varphi(\psi)-\varphi(t)}{2}\,\varphi'(t)\,dt. \quad (22)$$

Применив к полученному уравнению интерполяционную формулу Ньютона и заменив суммой интеграл, получим систему трансцендентных уравнений. Элемент суммы, отвечающий $t=\psi$ необходимо заменить удвоенной производной от $\ln r(\psi)$.

II. При реализации того или иного процесса, часто для малых значений целесообразно применять эквивалентные геометрические построения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Theodorsen T and Garrick I E, General Potential Theory of Arbitrary wing sections. National Advisory Committee on Aeronautics, Technical Report N452, 1933.

2. Hans Wittich. Konvergenzbetrachtung zum Abbildungzverfapren von Theodorsen—Garrik Mathemиtische Aunalen. 122. Band 1, Heft 1950.