ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ, ПРИБЛИЖАЮЩИЕ ФУНКЦИЮ НАИЛУЧШИМ ОБРАЗОМ В ЗАДАННОЙ СИСТЕМЕ ТОЧЕК

Е. И. КОСТЕНКО.

1. Дана непрерывная 2π-периодическая функция $y=f(x)$ и дана система точек

$$x_к = \frac{k\pi}{mn}, \quad k = 0, \ldots, 2mn.$$

Будем приближать данную функцию тригонометрическими полиномами степени $n-1$

$$T_{mn}(f, x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{2mn} (\alpha_\nu \cos \nu x + \beta_\nu \sin \nu x).$$

наилучшими в данной системе точек.

Определив коэффициенты из системы $2n$ уравнений, получим

$$T_{mn}(f, x) = \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^{2mn} f(x_к) \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)(x - x_к)}{2 \sin \frac{1}{2}(x - x_к)}.$$

Возьмем выражение

$$N_{mn}(x) = \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^{2mn} \left| \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)(x - x_к)}{2 \sin \frac{1}{2}(x - x_к)} \right|$$

и покажем, что справедлива

Теорема 1. Имеет место равенство

$$N_{mn}(x) = \frac{2}{m\pi \sin \frac{\pi}{2m}} \left| \cos\left(\frac{\pi}{2m} - nx\right) \right| \ln n + O(1).$$

Заметим, что $N_{mn}(x)$ — периодическая с периодом $h = \frac{\pi}{mn}$ функция, поэтому можно считать $0 < x \leqslant h$.

Запишем

$$N_{mn}(x) = \frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{mn}\left|\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)(x-x_k)}{2\sin\frac{1}{2}(x-x_k)}\right| +$$

$$+\frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{mn}\left|\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)(x+x_k)}{2\sin\frac{1}{2}(x+x_k)}\right| + O(1) = S_1 + S_2 + O(1).$$

Рассмотрим

$$S_1 = \frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{mn}\left|\frac{1}{2}\sin n(x-x_k)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(x-x_k)\right| + O(1).$$

Вследствие того, что

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{1}{t} = O(1) \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi),$$

то

$$S_1 = \frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{mn}\left|\frac{\sin n(x-x_k)}{x-x_k}\right| + O(1) =$$

$$= \frac{1}{m\pi}\sum_{i=1}^{m}|\sin n(x-x_i)|\ln n + O(1) \tag{1}$$

Аналогично,

$$S_2 = \frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{mn}\left|\sin n(x+x_k)\left[\frac{1}{\frac{1}{2}(x+x_k)} - \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}(x+x_k)}\right]\right| + O(1).$$

Рассмотрим сначала $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2mn}$. Тогда.

$$S_2 = \frac{1}{m\pi}\sum_{i=1}^{m}|\sin n(x+x_i)|\ln n + O(1). \tag{2}$$

Если $\frac{\pi}{2m} < x \leqslant \frac{\pi}{mn}$, то мы запишем $x = \pi - x'$, тогда $0 \leqslant x' < \frac{\pi}{2mn}$, и

$$S_2 = \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^{\Xi n} |\sin n (x' - x_к)| \left| \frac{2}{\pi - x' + x_к} - \frac{1}{\pi - x_к + x'} \right| +$$

$$+ O(1) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} |\sin n (x + x')| \ln n + O(1) \qquad (3)$$

Объединяя оценки (1), (2) и (3), получим

$$N_{mn}(x) = \frac{1}{m\pi} \ln n \sum_{i=1}^{m} |\sin n (x - x_i)| + |\sin n (x + x_i)| + O(1).$$

Найдем точки, в которых $\sin\left(\frac{i\pi}{m} - nx\right)$ меняет знак.

Имеем

$$\frac{i\pi}{m} - nx = \nu\pi, \qquad i = m\nu + \frac{x}{h}.$$

Положим

$$i_\nu = \left[m\nu + \frac{x}{h}\right] = m\nu,$$

тогда

$$\sum_{i=1}^{m} |\sin n (x - x_i)| = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2m} - nx\right)}{\sin \frac{\pi}{2m}}.$$

Аналогично,

$$\sum_{i=1}^{m} |\sin n (x + x_i)| = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2m} - nx\right)}{\sin \frac{\pi}{2m}}.$$

После некоторых преобразований получим

$$N_{mn}(x) = \frac{2}{m\pi \sin \frac{\pi}{2m}} \left|\cos\left(\frac{\pi}{2m} - nx\right)\right| \ln n + O(1).$$

Теорема 2. Для того, чтобы имело место равенство

$$\lim_{m, n \to \infty} T_{mn}(f, x) = f(x)$$

для всех $f(x) \in C_{2\pi}$ равномерно относительно x, необходимо и достаточно, чтобы

$$\cos\left(\frac{\pi}{2m} - nx\right) = O\left(\frac{1}{\ln n}\right). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $Q_{mn}(x)$ — тригонометрический полином порядка $n-1$ по x, дающий наилучшее приближение, а $E_{n-1}(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$ по x на классе $C_{2\pi}$.

Легко убедиться, что

$$|f(x) - T_{mn}(f, x)| \leqslant |f(x) - Q_{mn}(x)| + |T_{mn}[Q_{mn}(x), x] - [T_{mn}(f, x)]| \leqslant [1 + N_{mn}(x)]\, E_{n-1}(f),$$

Так как $E_{n-1}(f) \to 0$ для $f \in C_{2\pi}$, то

$$T_{mn}(f, x) - f(x) \to 0 \quad (m, n \to \infty)$$

тогда и только тогда, если $N_{mn}(x)$ ограничена, а это будет, если

$$\cos\left(\frac{\pi}{2m} - nx\right) = O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

Необходимость вытекает из того, что в случае невыполнения условия (4) следует неограниченность нормы $N_{mn}(x)$, а отсюда по известной теореме Банаха о последовательности линейных операторов с неограниченными нормами следует, что для любого x найдется такая непрерывная функция $f(x)$, для которой последовательность полиномов будет расходиться.

2. Рассмотрим класс $C_{2\pi}$ всех непрерывных 2π-периодических функций $f(x, y)$. Задается система точек

$$x_k = \frac{2k\pi}{M}, \quad M = 2mn, \quad k = 0, 1, \ldots, M;$$

$$y_l = \frac{2l\pi}{N}, \quad N = 2pq, \quad l = 0, 1, \ldots, N.$$

Рассмотрим тригонометрический полином вида

$$T_{\text{mp}}^{\text{NM}} = \frac{1}{MN} \sum_{\text{k}=1}^{\text{M}} \sum_{l=1}^{\text{N}} f(x_{\text{к}}, y_l) \times$$

$$\times \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)(x - x_{\text{к}}) \sin\left(q - \frac{1}{2}\right)(y - y_l)}{4 \sin\frac{1}{2}(x - x_{\text{к}}) \sin\frac{1}{2}(y - y_l)}.$$

Тогда

$$N_{\text{mp}}^{\text{MN}}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{\text{k}=1}^{\text{M}} \sum_{l=1}^{\text{N}} \times$$

$$\times \left| \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)(x - x_{\text{к}}) \sin\left(q - \frac{1}{2}\right)(y - y_l)}{4 \sin\frac{1}{2}(x - x_{\text{к}}) \sin\frac{1}{2}(y - y_l)} \right| =$$

$$= \frac{4 \ln n \ln p}{mp\,\pi^2 \sin\frac{\pi}{2\,m} \sin\frac{\pi}{2p}} \left| \cos\left(\frac{\pi}{2m} - nx\right) \cos\left(\frac{\pi}{2p} - qx\right) \right| + O(1),$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Н. М. Павловский, Известия высших учебных заведений, 5, 1964.
2. М. Д. Калашников, ДАН УССР, № 2, 1956.

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ РЕЛАКСИРУЮЩЕГО СТЕРЖНЯ СО СВОБОДНЫМИ КОНЦАМИ

С. С. КРИЦКАЯ.

Ли и Кантер [1] рассмотрели задачу о распространении смещений и напряжений в стержне постоянного сечения, материал которого удовлетворяет закону Максвелла

$$\sigma + n \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \tag{1}$$