Рассмотрим тригонометрический полином вида

$$T_{mp}^{NM} = \frac{1}{MN} \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{N} f(x_к, y_l) \times$$

$$\times \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)(x - x_к) \sin\left(q - \frac{1}{2}\right)(y - y_l)}{4 \sin \frac{1}{2}(x - x_к) \sin \frac{1}{2}(y - y_l)} .$$

Тогда

$$N_{mp}^{MN}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{N} \times$$

$$\times \left| \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)(x - x_к) \sin\left(q - \frac{1}{2}\right)(y - y_l)}{4 \sin \frac{1}{2}(x - x_к) \sin \frac{1}{2}(y - y_l)} \right| =$$

$$= \frac{4 \ln n \ln p}{mp \pi^2 \sin \frac{\pi}{2m} \sin \frac{\pi}{2p}} \left| \cos\left(\frac{\pi}{2m} - nx\right) \cos\left(\frac{\pi}{2p} - qx\right) \right| + O(1),$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Н. М. Павловский, Известия высших учебных заведений, 5, 1964.
2. М. Д. Калашников, ДАН УССР, № 2, 1956.

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ РЕЛАКСИРУЮЩЕГО СТЕРЖНЯ СО СВОБОДНЫМИ КОНЦАМИ

С. С. КРИЦКАЯ.

Ли и Кантер [1] рассмотрели задачу о распространении смещений и напряжений в стержне постоянного сечения, материал которого удовлетворяет закону Максвелла

$$\sigma + n \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \tag{1}$$

где μ — коэффициент вязкости, $n = \mu/E$ — время релаксации, σ — нормальное напряжение, E — модуль упругости, ε — относительная деформация, t — время; и на одном конце которого задано изменение скорости, а второй конец закрепленный. Решение этой задачи они получили для полубесконечного стержня. Методом отображений они определили напряжение в стержне конечной длины. Аналогичную задачу для стержня конечной длины рассмотрел М. М. Бородачов.

В данной статье рассмотрим задачу об ударе стержня конечной длины, материал которого удовлетворяет закону Максвелла, со свободными концами. Предположим, что в начальный момент времени стержень, который до того времени находился в покое, подвергается удару твердым телом по своему правому концу.

Решая совместно уравнение продольных колебаний стержня постоянного сечения

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{2}$$

и уравнение (1), получим для смещения $u(x, t)$ сечений стержня уравнение

$$E \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \rho \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\rho}{n} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{3}$$

Граничные условия таковы —

на свободном левом конце

$$x = 0 \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = , \quad t > 0, \tag{4}$$

на правом конце $x = l$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -H\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{1}{n} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right), \tag{5}$$

где $H = \dfrac{P}{EgF}$, F — площадь сечения стержня, P — вес ударяющего груза.

Начальные условия такие

$$u(x, 0) = 0, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad 0\leqslant x<l,\\ -v_0, & \text{если} \quad x=l,\end{cases} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,0)=0, \quad \text{если} \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{8}$$

где v_0 — скорость ударяющего груза.

Решая полученную задачу методом Фурье и учитывая, что сумма ряда

$$-\frac{1}{4(1+\gamma)}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\nu_m}{2\nu_m-2\sin\nu_m}\cos\nu_m\frac{x}{l}$$

равна 0, если $0\leqslant x<l$ и равна 1/4 если $x=l$, а также, что сумма ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\nu_m}{\nu_m^2(2\nu_m-\sin 2\nu_m)}\cos\nu_m\frac{x}{l},$$

равна

$$\frac{\gamma+3}{24(1+\gamma)^2}-\frac{x^2}{8l^2(1+\gamma)},$$

получим решение в виде ряда

$$u(x,t)=-\frac{v_0}{1+\gamma}t+\frac{v_0\rho l^2(\gamma+3)}{8(1+\gamma)}-\frac{v_0\rho x^2}{2(1+\gamma)}-$$

$$-\frac{4v_0\rho l^2}{nE}e^{-\frac{t}{2n}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\nu_m}{\nu_m^2(2\nu_m-\sin 2\nu_m)}\Big[\cos r_m t+$$

$$+\left(\frac{1}{2n}-\frac{n\nu_m^2E}{\rho l^2}\right)\frac{\sin r_m t}{r_m}\Big]\cos\frac{\nu_m}{l}x, \tag{9}$$

где ν — корни уравнения

$$\nu\operatorname{ctg}\nu=-\gamma, \quad \gamma=\frac{\lg\rho F}{P}, \qquad \text{а}$$

$$r_m=\sqrt{\frac{\nu_m^2E}{\rho l^2}-\frac{1}{4n^2}}.$$

$\cos\nu_m x/l$ — собственные функции, соответствующие собственному значению λ_n краевой задачи

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{10}$$

$$X'(0)=0, \tag{11}$$

$$X'(l)-a^2\lambda X(l)=0 \tag{12}$$

$$a^2=\frac{P}{\rho g F}\cdot$$

Для обоснования верности полученного решения необходимо произвести математический анализ частных производных, входящих в уравнение (3). Указанный анализ приводит к следующим результатам:

1. Если $t>0$ и $0\leqslant x\leqslant l$, то частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3\partial t}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial t\,\partial x}=\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}$$

непрерывны по обеим переменным x и t одновременно; но для их вычисления мы не имеем право дифференцировать ряд для u почленно. Однако такую возможность получим, если сделаем некоторые преобразования отнсительно ряда для $u(x, t)$. Если с ряда (9) выделим ряд

$$e^{-\frac{t}{2n}}\frac{4v_0\,l\sqrt{\rho}}{\sqrt{E}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\nu_m}{\nu_m(2\nu_m-\sin 2\nu_m)}\sin\nu_m\sqrt{\frac{E}{\rho}}\,\frac{t}{l}\cos\nu_m\frac{x}{l}$$

и заменим его суммой, которая равна

$$\frac{v_0\sqrt{\rho}\,x}{\sqrt{E}\,(1\pm\gamma)}\,e^{-\frac{t}{2n}},$$

то для вычисления $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ получим возможность дифференцировать полученный ряд для $u(x, t)$ почленно. Для $\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial x}$, $v=\frac{\partial u}{\partial t}$ получим такие формулы:

$$\varepsilon = -\frac{v_0 \rho x}{1+\gamma} + \frac{4 v_0 \rho l}{nE} e^{-\frac{t}{2n}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \nu_m}{\nu_m (2\nu_m - \sin 2\nu_m)} \left[\cos r_m t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4 n r_m} \sin r_m t - n r_m \sin r_m t + \frac{n \nu_m \sqrt{E}}{l \sqrt{\rho}} \sin \nu_m \frac{\sqrt{E}}{l\sqrt{\rho}} t \right] \times$$

$$\times \sin \nu_m \frac{x}{l} + \frac{v_0 \sqrt{\rho}}{\sqrt{E}(1+\gamma)} e^{-\frac{t}{2n}}, \qquad (13)$$

$$v = -\frac{v_0}{1+\gamma} + \frac{4 v_0 \rho l^2}{nE} e^{-\frac{t}{2n}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \nu_m}{\nu_m^2 (2\nu_m - \sin 2\nu_m)} \times$$

$$\times \left[\frac{\sin r_m t}{4 n^2 r_m} + \frac{1}{2n} \cos r_m t + \frac{n \nu^2_m E}{\rho l^2} (\cos r_m t - \right.$$

$$\left. - \cos \nu_m \frac{\sqrt{E}}{l \sqrt{\rho}} t \right] \cos \nu_m \frac{x}{l} - \frac{v_0 \sqrt{\rho}\, x}{2n \sqrt{E}\,(1+\gamma)} e^{-\frac{t}{2n}} \qquad (14)$$

Чтоб получить производные второго порядка, сделаем для $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ преобразования, аналогичные вышеприведенным для функции $u(x, t)$. Полученные ряды можно будет почленно дифференцировать. Аналогично можно получить формулы для $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}$. Эти формулы громоздки, поэтому их не приводим. Запишем лишь формулу для напряжения

$$\sigma = -\frac{v_0 \sqrt{\rho}\, \mu}{n \sqrt{E}(1+\gamma)} e^{-\frac{t}{2n}} + \frac{4 v_0 \rho l \mu}{n^3 E} e^{-\frac{t}{2n}} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \nu_m \sin \nu_m \frac{x}{l}}{\nu_m (2\nu_m - \sin 2\nu_m)} \left\{ -\frac{n^2 \nu^2_m E}{\rho l^2} \frac{\sin r_m t}{r_m} + \right.$$

$$+ \frac{n \nu^2_m E \cos \nu_m \frac{\sqrt{E}}{l\sqrt{\rho}} t}{l^2 \rho \left(\frac{1}{2n^2} + r^2_m \right)} + \left[\frac{n^2 \nu_m \sqrt{E}}{l \sqrt{\rho}} - \frac{\nu_m \sqrt{E}}{2 l \sqrt{\rho} \left(\frac{1}{2n^2} + r_m \right)} \right] \times$$

$$\times \sin \nu_m \frac{\sqrt{E}}{l \sqrt{\rho}} t. \qquad (15)$$

2. Если $l>0$, $0\leqslant x\leqslant l$, то выполняется уравнение (3) тождественно, а при $x=0$ и $x=l$ граничные условия (4) и (5).

3. Если $t\to 0$, то $\frac{\partial u}{\partial t}\to 0$ при $0\leqslant x<l$ и $\frac{\partial u}{\partial t}\to -v_0$ при $x=l$; $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\to 0$ для $0\leqslant x\leqslant l$, т. е. выполняются начальные условия (6) — (8).

4. Если $t\to\infty$, то $\varepsilon\to-\frac{v_0\rho x}{1+\gamma}$ для x $0\leqslant x\leqslant l$, напряжение $\sigma\to 0$. Кроме того частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^3 n}{\partial t^3},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}=\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}$$

стремятся к нулю при $t\to\infty$ и $0<x<l$.

Полученное решение единственное.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ли и Кантер, Механика. Сборник сокращенных переводов и рефератов иностранной периодической литературы, № 4, 1954.
2. М. М. Бородачов, Прикладна механіка, том IV, вып. 2, 1958.
3. А. Н. Тверитин, Труды ДИИТ, вып. XX, 1950.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОЙ МЕТРИКИ ХАУСДОРФОВА ТИПА МНОГОЧЛЕНАМИ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

В. Т. МАРТЫНЮК.

Известно (см., например, [1]), что, если функция $f(x, y)$ непрерывна в квадрате $R=[0,1;\ 0,1]$, то равномерно для всех $(x, y)\in R$

$$\lim_{n,\, m\to\infty} B_{n,m}(f; x, y)=f(x, y), \tag{1}$$

где

$$B_{n,m}(f, x, y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{m}\right) C_n^k C_m^l x^k y^l (1-x)^{n-k}(1-)^{m-l} \tag{2}$$

полиномы С. Н. Бернштейна.