2. Если $l>0$, $0\leqslant x\leqslant l$, то выполняется уравнение (3) тождественно, а при $x=0$ и $x=l$ граничные условия (4) и (5).

3. Если $t\to 0$, то $\frac{\partial u}{\partial t}\to 0$ при $0\leqslant x<l$ и $\frac{\partial u}{\partial t}\to -v_0$ при $x=l$; $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\to 0$ для $0\leqslant x\leqslant l$, т. е. выполняются начальные условия (6) — (8).

4. Если $t\to\infty$, то $\varepsilon\to-\frac{v_0\rho x}{1+\gamma}$ для x $0\leqslant x\leqslant l$, напряжение $\sigma\to 0$. Кроме того частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^3 n}{\partial t^3},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}=\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}$$

стремятся к нулю при $t\to\infty$ и $0<x<l$.

Полученное решение единственное.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ли и Кантер, Механика. Сборник сокращенных переводов и рефератов иностранной периодической литературы, № 4, 1954.

2. М. М. Бородачов, Прикладна механіка, том IV, вип. 2, 1958.

3. А. Н. Тверитин, Труды ДИИТ, вып. XX, 1950.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОЙ МЕТРИКИ ХАУСДОРФОВА ТИПА МНОГОЧЛЕНАМИ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

В. Т. МАРТЫНЮК.

Известно (см., например, [1]), что, если функция $f(x, y)$ непрерывна в квадрате $R=[0,1;\ 0,1]$, то равномерно для всех $(x, y)\in R$

$$\lim_{n,\, m\to\infty} B_{n,\,m}(f;\, x,\, y)=f(x,y), \tag{1}$$

где

$$B_{n,\,m}(f,x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} f\left(\frac{k}{n},\ \frac{l}{m}\right) C_n^k\, C_m^l\, x^k y^l (1-x)^{n-k}(1-)^{m-l} \tag{2}$$

полиномы С. Н. Бернштейна.

Если же функция $f(x, y)$ не является непрерывной, то это утверждение не имеет места. Однако, если в множестве ограниченных (не обязательно непрерывных) функций ввести метрику типа метрики, предложенной Ф. Хаусдорфом ([2], стр. 166) для точечных множеств, то, как доказывается в этой статье, соотношение (1) будет верно. Для случая функций одной переменной этот результат получен Бл. Сендовым [3].

Следуя Бл. Сендову [3], будем называть дополненным графиком ограниченной функции $f(x, y)$ и обозначать через $\overline{f}$ пересечение всех замкнутых точечных множеств F пространства переменных x, y, z, содержащих точки $(x, y, f(x, y))$ и выпуклых относительно оси z, т.е. таких, что каждая прямая, параллельная оси z, пересекает множество F или в одной точке, или по отрезку.

Ясно, что множество $\overline{f}$ замкнутое и односвязное.

В дальнейшем будем считать функции тождественно равными, если их дополненные графики совпадают.

Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ будем вычислять по формуле (см. [3]).

$$\|M_1-M_2\|_0=\max\left[\,|x_1-x_2|,\ |y_2-y_2|\,z_1-z_2|\,\right]. \tag{3}$$

Обозначим через K пространство ограниченных в квадрате R функций $f(x, y)$, метрика в котором введена следующим равенством

$$r(f;\varphi)=\max\left[\max_{M_1\in\overline{f}}\min_{M_2\in\overline{\varphi}}\|M_1-M_2\|_0,\ \max_{M_1\in\overline{\varphi}}\min_{M_2\in\overline{f}}\|M_1-M_2\|_0\right], \tag{4}$$

где величина $\|M_1-M_2\|_0$ определена равенством (3).

Легко проверить, что K — полное метрическое пространство.

Будем называть модулем немонотонности функции $f(x, y)\in K$ выражение

$$\mu(f;t,\tau)\ \frac{1}{2}\sup_{\substack{|x_1-x_2|\leqslant t\\ |y_1-y_2|\leqslant\tau}}\left\{\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant1}\Big[\,|f(x_1,y_2)-\right.$$

$$-f(x_1-\lambda(x_2-x_1),\,y_1+\lambda(y_2-y_1))\,|+|f(x_2,y_2)-|f(x_1+$$

$$\left.+\lambda(x_2-x_1),\,y_1+\lambda(y_2-y_1))\,|\,\Big]-|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\right\}, \tag{5}$$

причем, точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) берутся из квадрата R.

Мы видим, что каждой функции $f(x, y) \in K$ можно поставить в соответствие функцию $\mu(f; t, \tau)$, обладающую свойствами: 1) $\mu(f; t, \tau)$ определена для всех $t, \tau \geqslant 0$, причем $\mu(f; 0, 0) = 0$; 2) $\mu(f; t, \tau)$ не убывает по каждой переменной.

Можно показать, что и, наоборот, всякая функция $\mu(t, \tau)$, обладающая свойствами 1) и 2), является модулем немонотонности некоторой функции $f(x, y)$. Поэтому условимся функцию $\mu(t, \tau)$, обладающую свойствами (1) и (2) называть модулем немотонности.

В дальнейшем будем рассматривать только такие модули немонотонности, для которых $\lim\limits_{t, \tau \to 0} \mu(t, \tau) = 0$ при произвольном стремлении t, τ к нулю.

Обозначим через KH_μ класс функций $f(x, y) \in K$ для которых:

1) $\sup\limits_{(x, y) \in R} | f(x, y) | \leqslant K$, 2) $\mu(f; t, \tau) \leqslant \mu(t, \tau)$,

где $\mu(t, \tau)$ заданный модуль немонотонности.

Имеет место следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Если $f(x, y) KH_\mu$ и (x_1, y_1, z_1) — произвольная точка множества $\bar{f}$, то для любых $\delta_1, \delta_2 \geqslant 0$ каждое из неравенств

$$f(x, y) \geqslant z_1 - 2\mu(4\delta_2, 4\delta_2) \tag{6}$$

$$f(x, y) \leqslant z_2 + 2\mu(4\delta_1, 4\delta_2) \tag{6'}$$

выполняется в одном из прямоугольников:

$$\Delta_1 = [x_1 - 2\delta_1, x_1; y_1 - 2\delta_2, y_1] \cap R,$$
$$\Delta_2 = [x_1 - 2\delta_1, x_1; y_1, y_1 + 2\delta_2] \cap R,$$
$$\Delta_3 = [x_1, x_1 + 2\delta_1; y_1 - 2\delta_3, y_1] \cap R,$$
$$\Delta_4 = [x_1 x_1 + 2\delta_1; y_1, y_1 + 2\delta_2] \cap R,$$

Обозначим $\psi_{n, k}(x) = C^k_n x^k (1 - x)^{n-k}$.

Если p — натуральное, а δ — положительное числа, то для всех $x \in [0,1]$ имеет место оценка ([3], см., также [4], стр. 155—158)

$$\sum_{k \in \Delta(x)} \psi_{n, k}(x) \leqslant 2 \frac{(2p)!}{n^p \delta^{2p}}, \tag{7}$$

где $\Delta(x)$ — множество тех чисел k, для которых $\left| \frac{k}{n} - x \right| \geqslant \delta$.

Исходя из леммы 1 и оценки (7), можно доказать следующие утверждения:

Лемма 2. Если $f(x, y) \in KH_\mu$, $B_{n,m}(f; x, y)$ — многочлен С. Н. Бернштейна (2), то для каждой точки $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \overline{f}$ и любых чисел $\delta_1, \delta_2 \geqslant 0$ найдется точка $M_2(x_2, y_2, z_2) \in \overline{B}_{n,m}$ такая, что

$$|x_1 - x_2| \leqslant 2\delta_1, \quad |y_1 - y_2| \leqslant 2\delta_2,$$

$$|z_1 - z_2| \leqslant 2\mu(4\delta_1, 4\delta_2) + 4K\left\{\frac{(2p)!}{n^p \delta_1^{2p}} + \frac{(2q)!}{m^q \delta_2^{2q}}\right\}, \tag{8}$$

где p, q — произвольные числа (натуральные).

Лемма 3. Пусть $f(x, y) \in KH_\mu$, p, q — произвольные натуральные числа. Для любых чисел $\delta_1, \delta_2 \geqslant 0$ и каждой точки $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \overline{B}_{n,m}$ найдется точка $M_2(x_2, y_2, z_2) \in \overline{f}$ такая, что

$$|x_1 - x_2| \leqslant 2\delta_1, \quad |y_1 - y_2| \leqslant 2\delta_2$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant 4K\left\{\frac{(2p)!}{n^p \delta_1^{2p}} + \frac{(2q)!}{m^q \delta_2^{2q}}\right\}. \tag{9}$$

Из лемм, учитывая (3) и (4), непосредственно следует

Теорема. Если $f(x, y) \in KH_\mu$, $B_{n,m}(f; x, y)$ — многочлен С. Н. Бернштейна (2), а p, q — произвольные натуральные числа, то

$$r(f; B_{n,m}) \leqslant \inf_{\delta_1, \delta_2 \geqslant 0} \max\Big[2\delta_1;\ 2\delta_2;\ 2\mu(4\delta_1, 4\delta_2) +$$
$$+ 4K\left\{\frac{(2p)!}{n^p \delta_1^{2p}} + \frac{(2q)!}{m^q \delta_2^{2q}}\right\}. \tag{10}$$

Положим в соотношении (10)

$$p = \left[\frac{\ln\ln n}{2}\right] + 1, \qquad q = \left[\frac{\ln\ln m}{2}\right] + 1$$
$$\delta_1 = \frac{1}{4} n^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}}, \qquad \delta_2 = \frac{1}{4} m^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2q}}. \tag{11}$$

Имеем

$$\frac{(2p)!}{n^p \delta_1^{2p}} + \frac{(2q)!}{m^q \delta_2^{2q}} \leqslant (2p)^{2p} 4^{2p} n^{-1} + (2q)^{2q} 4^{2q} m^{-1} =$$
$$= (8p)^{2p} n^{-1} + (8q)^{2q} m^{-1}.$$

Для так выбранных p, q существует (см. [3]) абсолютная постоянная C_1 такая, что

$$\frac{(2p)!}{n^p \delta_1^{2p}} + \frac{(2q)!}{m^q \delta_2^{2q}} \leqslant C_1 \sqrt{n}\, n^{-1} + C_1 \sqrt{m}\, m^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left(n^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln\ln n}} + m^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln\ln m}} \right).$$

Из (10), учитывая, что $p \geqslant \frac{\ln\ln n}{2}$, $q \geqslant \frac{\ln\ln m}{2}$ получаем

$$r(f; B_{n,m}) \leqslant 2\mu\left(n^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln\ln n}},\quad m^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln\ln m}}\right) +$$

$$+ C_2 \left(n^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln\ln n}} + m^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln\ln m}}\right), \tag{12}$$

где $C_2 = \max\left[\frac{1}{2},\ 4KC_1\right]$.

Из неравенства (12) получаем

Следствие. Если $f(x,y) \in KH_\mu$, то

$$\lim_{n,m\to\infty} r(f; B_{n,m}) = 0.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи:

а) $\mu(t,\tau) \geqslant t + \tau$.

Из (12) получаем

$$r(f; B_{n,m}) \leqslant (2 + C_1)\,\mu\left(n^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln\ln n}},\quad m^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln\ln m}}\right), \tag{13}$$

б) $\mu(t,\tau) \leqslant L_1 t^\alpha + L_2 \tau^\beta$ $(\alpha, \beta > 0;\quad L_1, L_2 = \mathrm{const})$.

Для $n, m \geqslant e^{e^2}$ в этом случае, из (12) имеем

$$r(f; B_{n,m}) \leqslant 2L_1 n^{-\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{\ln\ln n}} + 2L_2 m^{-\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{\ln\ln m}} +$$

$$+ C_2 \left(n^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln\ln n}} + m^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln\ln m}}\right),$$

откуда

$$r(f; B_{n,m}) \leqslant C_3 \left(n^{-\frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{\ln\ln n}} + m^{-\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{\ln\ln m}}\right),$$

где $\rho = \min[1, \alpha]$, $\gamma = \min[1; \beta]$, а C_3 — постоянная зависящая только от K, L_1 и L_2.

ЛИТЕРАТУРА:

1. А. И. Ипатов, Оценка погрешности и порядок приближения функций двух переменных полиномами С. Н. Бернштейна. Уч. зап. Петрозавод. ун-та, т. 4, в. 4, 1955.

2. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М-Л, ОНТИ НКТП, 1937.

3. Бл. Сендов, Об одной оценке приближения функций многочленами С. Н. Бернштейна, „Mathematica" (RSR), 1965, 7, № 1, 145—154.

4. С. Н. Бернштейн, Соч., т. 2, М., 1954.

К ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ

И. И. МИЩИШИН.

К решению линейной задачи сопряжения сводятся многие задачи теории упругости и гидродинамики. В настоящей работе мы сформулируем одну из таких задач и сделаем ее анализ.

Рассмотрим задачу о контакте двух упругих тел. На упругие свойства этих тел не будем накладывать никаких ограничений. Предполагается, что участок контакта состоит из участков сцепления и участков проскальзывания. Длина линии контакта мала по сравнению с линейными размерами тел и поэтому мы можем рассматривать задачу о контакте двух полуплоскостей вдоль отрезка оси х-ов. Все, что относится к нижней полуплоскости, мы будем обозначать индексом «1» и знаком «—», а относящееся к верхней полуплоскости — индексом «2» и знаком «+».

Пусть на линии контакта на нижнюю полуплоскость действует нормальное сжимающее напряжение $Y_{y1}^{-}(x)=-P(x)$ и тангенциальное напряжение $X_{y1}^{-}(x)=T(x)$. На верхнюю полуплоскость действуют соотвественно $Y_{y2}^{+}(x)=-P(x)$ и $X_{y2}^{+}(x)=T(x)$. Будем считать, что напряжения и вращения тел равны нулю на бесконечности. Сформулируем граничные условия для нашей задачи:

1) нормальное и тангенциальное напряжения равны на всей линии контакта

$$Y_{y1}^{-}(x)=Y_{y2}^{+}(x),\quad X_{y1}^{-}(x)=X_{y2}^{+}(x). \tag{1}$$