ЛИТЕРАТУРА:

1. А. И. Ипатов, Оценка погрешности и порядок приближения функций двух переменных полиномами С. Н. Бернштейна. Уч. зап. Петрозавод. ун-та, т. 4, в. 4, 1955.

2. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М-Л, ОНТИ НКТП, 1937.

3. Бл. Сендов, Об одной оценке приближения функций многочленами С. Н. Бернштейна, „Mathematica" (RSR), 1965, 7, № 1, 145—154.

4. С. Н. Бернштейн, Соч., т. 2, М., 1954.

К ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ

И. И. МИЩИШИН.

К решению линейной задачи сопряжения сводятся многие задачи теории упругости и гидродинамики. В настоящей работе мы сформулируем одну из таких задач и сделаем ее анализ.

Рассмотрим задачу о контакте двух упругих тел. На упругие свойства этих тел не будем накладывать никаких ограничений. Предполагается, что участок контакта состоит из участков сцепления и участков проскальзывания. Длина линии контакта мала по сравнению с линейными размерами тел и поэтому мы можем рассматривать задачу о контакте двух полуплоскостей вдоль отрезка оси х-ов. Все, что относится к нижней полуплоскости, мы будем обозначать индексом «1» и знаком «—», а относящееся к верхней полуплоскости — индексом «2» и знаком «+».

Пусть на линии контакта на нижнюю полуплоскость действует нормальное сжимающее напряжение $Y_{y1}^{-}(x)=-P(x)$ и тангенциальное напряжение $X_{y1}^{-}(x)=T(x)$. На верхнюю полуплоскость действуют соотвественно $Y_{y2}^{+}(x)=-P(x)$ и $X_{y2}^{+}(x)=T(x)$. Будем считать, что напряжения и вращения тел равны нулю на бесконечности. Сформулируем граничные условия для нашей задачи:

1) нормальное и тангенциальное напряжения равны на всей линии контакта

$$Y_{y1}^{-}(x)=Y_{y2}^{+}(x),\quad X_{y1}^{-}(x)=X_{y2}^{+}(x). \tag{1}$$

2) на всей линии контакта нормальные смещения в обоих телах связаны соотношением [1]:

$$v_1^-(x) - v_2^+(x) = f(x) \qquad (2)$$

3) участок контакта делится на участки скольжения и участки сцепления. На этих участках граничные условия соответственно имеют вид:

$$T(x) = \nu P(x), \qquad (3)$$

где ν — коэффициент трения Кулона и

$$u_1^-(x) = u_2^+(x). \qquad (4)$$

Сформулируем задачу линейного сопряжения для данной контактной задачи.

Пусть в нижней полуплоскости определена кусочно-аналитическая функция $\Phi_1(z)$, аналитическая всюду за исключением линии контакта. Эту функцию можно аналитически продолжить через ненагруженные участки оси х-ов на верхнюю полуплоскость. Аналогично в верхней полуплоскости определена функция $\Phi_2(z)$. Известно, что напряжения и смещения связаны с функциями $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ следующими соотношениями [1]:

$$Y_{y\kappa}(z) - i X_{y\kappa}(z) = \Phi_\kappa(z) - \Phi_\kappa(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_\kappa'(z)} \qquad (5)$$

$$2\mu_\kappa(u_\kappa'(z) + i u_\kappa'(z)) = \chi_\kappa \Phi_\kappa(z) +$$
$$+ \Phi_\kappa(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_\kappa'(z)}\ k = 1, 2. \qquad (6)$$

Из граничного условия (1) получаем, что

$$(\Phi_1(x) + \Phi_2(x))^- = (\Phi_1(x) + \Phi_2(x))^+. \qquad (7)$$

Из равенства (7) видно, что функция $\Phi_1(z) + \Phi_2(z)$ аналитична во всей плоскости. Учитывая, что напряжения и вращения должны равняться нулю на бесконечности, мы можем сделать вывод, что функция $\Phi_1(z) + \Phi_2(z)$ при $z \to \infty$ равна нулю.

По теореме Лиувилля [2] эта сумма равна нулю во всей плоскости. Значит

$$\Phi_1(z) = -\Phi_2(z) \qquad (8)$$

Для выражения граничного условия (2) через функцию

$\Phi_1(z)$ сделаем следующие преобразования. Переходя к пределу в равенстве (6), получим:

$$2\mu_1(u_1'^{-}(x)+iv_1'^{-}(x))=\chi_1\Phi_1^-(x)+\Phi_1^+(x),$$
$$2\mu_2(u_2'^{+}(x)+iv_2'^{+}(x))=\chi_2\Phi_2^+(x)+\Phi_2^-(x). \tag{9}$$

Найдем сопряженные значения к соотношениям (9)

$$2\mu_1(u_1'^{-}(x)-iv_2'^{-}(x))=\chi_1\overline{\Phi}_1^+(x)+\overline{\Phi}_1^-(x),$$
$$2\mu_2(v_2'^{+}(x)-iv_2'^{+}(x))=\chi_2\overline{\Phi}_2^-(x)+\overline{\Phi}_2^+(x). \tag{10}$$

Из соотношений (9) и (10) найдем $v_1'^{-}(x)$ и $v_2'^{+}(x)$

$$v_1'^{-}(x)=\frac{\chi_1}{4\mu_1 i}(\Phi_1^-(x)-\overline{\Phi}_1^+(x))+\frac{1}{4\mu_1 i}(\Phi_1^+(x)-\overline{\Phi}_1^-(x)),$$
$$v_2'^{+}(x)=\frac{\chi_2}{4\mu_2 i}(\Phi_1^+(x)-\overline{\Phi}_1^-(x))+\frac{1}{4\mu_2 i}(\Phi_2^-(x)-\overline{\Phi}_2^+(x)). \tag{11}$$

Воспользовавшись соотношениями (8) и (2), получим:

$$k_3\Phi_1^+(x)-k_1\overline{\Phi}_1^+(x)+k_1\Phi_1(x)-k_2\overline{\Phi}_1^-(x)=if'(x). \tag{12}$$

где $\quad k_1=\dfrac{\chi_1}{4\mu_1}+\dfrac{1}{4\mu_2} \quad$ и $\quad k_2=\dfrac{\chi_2}{4\mu_2}+\dfrac{1}{4\mu_1}$.

Условие (12), соответствующее граничному условию (2), справедливо на всей линии контакта.

Получим два других условия, справедливые на различных участках линии контакта. Выразим граничное условие (4) через функцию $\Phi_1(z)$. Из соотношений (9) и (10) найдем $u_1'^{-}(x)$ и $u_2'^{+}$(x).

$$u_1'^{-}(x)=\frac{\chi_1}{4\mu_1}(\Phi_1^-(x)+\overline{\Phi}_1^+(x))+\frac{1}{4\mu_1}(\Phi_1^+(x)+\overline{\Phi}_1^-(x)),$$
$$u_2'^{+}(x)=\frac{\chi_2}{4\mu_2}(\Phi_2^+(x)+\overline{\Phi}_2^-(x))+\frac{1}{4\mu_2}(\Phi_2^-(x)+\overline{\Phi}_2^+(x)). \tag{15}$$

После подстановки найденных величин в соотношение (4), воспользовавшись равенством (8), получим:

$$k_2 \Phi_1^+(x) + k_1 \overline{\Phi}_1^+(x) + k_1 \Phi_1^-(x) + k_2 \overline{\Phi}_1^-(x) = 0. \qquad (14)$$

Осталось выразить условие (3) через функцию $\Phi_1(z)$. Для этого перейдем к пределу в формуле (5) и найдем сопряженное значение к полученному.

$$\begin{aligned} Y_{y1}^-(x) - i X_{y1}^-(x) &= \Phi_1^-(x) - \Phi_1^+(x), \\ Y_{y1}^-(x) + i X_{y1}^-(x) &= \overline{\Phi}_1^+(x) - \overline{\Phi}_1^-(x). \end{aligned} \qquad (15)$$

В равенства (15) подставим $Y_{y1}^-(x) = -P(x)$ и $X_{y1}^-(x) = T(x)$

$$\begin{aligned} -P(x) - i\,T(x) &= \Phi_1^-(x) - \Phi_1^+(x), \\ -P(x) + i\,T(x) &= \overline{\Phi}_1^+(x) - \overline{\Phi}_1^-(x) \end{aligned} \qquad (16)$$

Из двух уравнений (16) найдем $P(x)$ и $T(x)$ и подставим в граничное условие (3). Это приводит к следующему граничному условию для функции $\Phi_1(z)$:

$$[(\nu + i)\Phi_1(x) - (\nu - i)\overline{\Phi}_1(x)]^+ = [(\nu + i)\Phi_1(x) - (\nu - i)\overline{\Phi}_1(x)]^- .$$

Соотношения (12), (14) и (17) формулируют задачу линейного сопряжения для нахождения функций $\Phi_1(z)$ и $\overline{\Phi}_1(z)$.

Из граничных условий (12) и (14), которые справедливы на участке сцепления, получим:

$$\begin{aligned} k_2 \Phi_1^+(x) + k_1 \Phi_1^-(x) &= \frac{t}{2} f'(x), \\ k_1 \overline{\Phi}_1^+(x) + k_2 \overline{\Phi}_1^-(x) &= -\frac{i}{2} f'(x). \end{aligned} \qquad (18)$$

Таким образом, на участке сцепления решение поставленной задачи сводится к нахождению функций $\Phi_1(z)$ и $\overline{\Phi}_1(z)$, которые входят каждая в одно из соотношений (18), т. е. задача свелась к задаче линейного сопряжения для одной функции. Для вывода соотношений (18) не имеет значения будут ли на линии контакта другие участки или нет.

Предположим, что на всей линии контакта справедливо условие (3), а значит и условие (17). В этом случае линейная комбинация $(\nu + i)\Phi_1(z) - (\nu - i)\overline{\Phi}_1(z)$ является аналитичной функцией во всей плоскости. А значит по теореме Лиувилля [2]:

$$(\nu + i)\Phi_1(z) - (\nu - i)\overline{\Phi}_1(z) = 0. \qquad (19)$$

Таким образом, если на всей линии контакта будет справедливо условие (3), то задача линейного сопряжения сведется к задаче линейного сопряжения для одной функции. Было бы неправильным делать вывод об аналитичности функции $(\nu+i)\,\Phi_1(z)-(\nu-i)\,\overline{\Phi}(z)$ во всей плоскости, если соотношение (17) справедливо не на всей линии контакта. Отсюда можно сделать вывод, что граничные условия для функции $\Phi_1(z)$, которые справедливы при скольжении на всей линии контакта нельзя переносить на участки контакта, когда на линии контакта не везде справедливо соотношение (17), как это сделано в работе [3]. В рассматриваемом случае задача сводится к задаче линейного сопряжения для двух функций с кусочно-постоянным коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Москва, 1966.

2. И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, Москва, 1960.

3. Piero Villagio, Su un problema elastico piano della teoria dellatrito volvente, Istituto Lombardo (Rend. Sc.), A95, (919—940), 1961.

ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ $(W^{(\alpha)}P, Q)$-МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Н. С. НОВИКОВА.

Настоящая статья является обобщением результатов автора [1] на двумерный случай.

Пусть функция $f(u, v)$, определенная в области $R\,[0\leqslant u<\infty, 0\leqslant v<\infty]$, интегрируема в смысле Лебега на каждом конечном сегменте $[0\leqslant u\leqslant x, 0\leqslant v\leqslant y]$ и пусть $P(x)$ и $Q(y)$ — положительные монотонно неубывающие функции при $x>0$, $y>0$; $P(x)\equiv 0$, $x<0$; $Q(y)\equiv 0$, $y<0$.

Положим $\alpha=1, 2\dots$ и

$$W^{(\alpha)}(x, y)=\frac{l}{P(x)\,Q(y)}\int\limits_0^x\int\limits_0^y d_u P(x-u)\,d_v Q(y-v)\;W^{(\alpha-1)}(u, v), \tag{1}$$