ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ

К. М. СЛЕПЕНЧУК.

Преобразуем числовой ряд

$$\sum_{к=0}^{\infty} u_к \tag{1}$$

с частными суммами S_n с помощью матрицы $A = \| a_{nк} \|$ следующим образом:

$$\sigma_n = \sum_{к=0}^{\infty} a_{nк} S_к. \tag{2}$$

Ряд (1) A — суммируем к S, если $\sigma_n \to S$; $n \to \infty$, и $|A|$—суммируем, если последовательность $\{\sigma_n\}$ абсолютно сходится, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_{n-1} - \sigma_n| < \infty .$$

Наряду с преобразованием (2), рассмотрим преобразование ряда (1) в последовательность: $\sum\limits_{к=0}^{\infty} b_{nк} u_к$. Для этого преобразования в работе [1] установлена одна теорема тауберова типа на случай абсолютной суммируемости и дано приложение этой теоремы для метода Бореля, определяемого соотношением

$$\varphi(x) = e^{-x} \sum_{к=0}^{\infty} \left(\sum_{i=к}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \right) u_к.$$

В данной заметке устанавливается аналогичная теорема тауберова типа для преобразования (2) и дано ее приложение к экспоненциальному методу Бореля.

Пусть последовательность $\{c_n\}$ ограничена, $c_n > 0$ и для A-метода

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_к(n+1) - \beta_к(n)| < C, \tag{3}$$

где $\beta_к(n)=\sum_{i=к}^{\infty} a_{ni}\sum_{j=к}^{i} c_j - \sum_{i=к}^{n} c_i$ и постоянная C не зависит от n (при этом мы считаем, что ряды в правой части сходятся при каждом n, а последняя сумма при $k>n$ равна нулю). A—метод, удовлетворяющий условию (3), будем обозначать через (A, c).

В дальнейшем будем писать $u_к=\Theta(c_к)$, если последовательность $\{u_к/c_к\}$ абсолютно сходится к нулю.

Теорема 1. Если ряд (1) $|(A,c)|$— суммируем, то условие

$$u_к=\Theta(c_к).\ u_к=S_к-S_{к-1}, \tag{4}$$

является достаточным для его абсолютной сходимости.

Доказательство. Пусть $\alpha_к=u_к/c_к-u_{к-1}/c_{к-1}$, $u_{-1}/c_{-1}=0$.

Тогда $u_n=c_n\sum_{к=0}^{n}\alpha_к$, причем, по условию (4) $\sum_{к=0}^{\infty}|\alpha_к|<\infty$.

В таком случае

$$\sigma_к-S_n=\sum_{к=0}^{\infty}a_{nк}\sum_{i=0}^{к}u_i-\sum_{к=0}^{n}u_i=\sum_{к=0}^{\infty}a_{nк}\sum_{i=0}^{к}c_i\sum_{j=0}^{i}\alpha_j-\sum_{к=0}^{n}c_к\sum_{i=0}^{к}\alpha_i=$$

$$=\sum_{к=0}^{\infty}a_{nк}\sum_{i=0}^{к}\alpha_i\sum_{j=i}^{к}c_j-\sum_{к=0}^{n}\alpha_к\sum_{i=к}^{n}c_i=\sum_{к=0}^{\infty}\alpha_к\sum_{i=к}^{\infty}a_{ni}\sum_{j=к}^{i}c_j-$$

$$-\sum_{к=0}^{n}\alpha_к\sum_{i=к}^{n}c_i=\sum_{к=0}^{\infty}\alpha_к\beta_к(n)=\sigma_n^{(1)}.$$

Если выполнено (3), то последовательность $\{\sigma_n^{(1)}\}$ абсолютно сходится. Но тогда абсолютно сходится и последовательность $\{S_n\}$ или ряд (1). Тем самым, теорема доказана.

Ряд (1) B — суммируем к S, если

$$f(x)=e^{-x}\sum_{к=0}^{\infty}x^к/k!\,S_к\to S,\ +\infty,$$

и $|B|$ — суммируем, если функция $f(x)$ является функцией ограниченной вариации на $(0,\infty)$.

Теорема 2. Если ряд (1) $|B|$— суммируем, то условие $u_n=\Theta(1/\sqrt{n})$ является достаточным для его абсолютной сходимости.

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены. Тогда из $|B|$ — суммируемости ряда (1), если положить $x=n$, следует абсолютная сходимость последовательности

$$\bar{\sigma}_n = e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} S_k = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_{nk} S_k, \quad \bar{a}_{nk} = e^{-n} \frac{n^k}{k!}.$$

Покажем, что матрица $\bar{B} = \|a_{nk}\|$ является матрицей типа (A, c). С этой целью положим в теореме 1 $c_n = 1/\sqrt{n}$. Тогда

$$\bar{b}_k(n) = e^{-n} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{n^i}{i!} \sum_{j=k}^{i} \frac{1}{\sqrt{j}} - \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}.$$

В дальнейшем мы воспользуемся следующими соотношениями, доказанными в работе [1]:

$$\frac{e^{-(k-1)}}{\sqrt{k-1}} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(i-k)(k-1)^i}{i!} = O(1),$$

$$e^{-x_0} \sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{i+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right| \frac{x_0^i}{i!} = O(1),$$

$$n < x_0 < n+1,$$

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\beta}_k(n+1) - \bar{\beta}_k(n)| = \sum_{n=1}^{k-2} |\bar{\beta}_k(n+1) - \bar{\beta}_k(n)| +$$

$$+ \sum_{n=k-1}^{\infty} |\bar{\beta}_k(n+1) - \bar{\beta}_k(n)|.$$

Если $k>n+1$ (первая сумма справа), то

$$\bar{b}_k(n) = e^{-n} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{n^i}{i!} \sum_{j=k}^{i} \frac{1}{\sqrt{j}}.$$

Эта величина является монотонно возрастающей по переменной n. В самом деле, если

$$\psi(x) = e^{-x} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \sum_{j=k}^{i} \frac{1}{\sqrt{j}},$$

то

$$\psi'(x) = e^{-x} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{\sqrt{i}\,(i-1)!} > 0.$$

В таком случае

$$\sum_{n=1}^{\kappa-2} |\bar{\beta}_\kappa(n+1)-\bar{\beta}_\kappa(n)| \leqslant \frac{1}{e^{\kappa-1}} \sum_{i=\kappa}^{\infty} \frac{(k-i)^i}{i!} \sum_{j=\kappa}^{i} \frac{1}{\sqrt{j}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{e^{\kappa-1}} \frac{1}{\sqrt{k-1}} \sum_{i=\kappa}^{\infty} (i-k) \frac{(k-1)^{i-1}}{i!} = 0(1).$$

Если $k \leqslant n+1$ (вторая сумма справа), то

$$\bar{\beta}_\kappa(n+1)-\bar{\beta}_\kappa(n) = \sum_{i=\kappa}^{\infty} \left[\frac{(n+1)^i}{e^{n+1} i!} - \sum_{i=\kappa}^{\infty} \frac{n^i}{e^n i!} \right] \sum_{j=\kappa}^{i} \frac{1}{\sqrt{j}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Тогда, применив теорему о среднем,

$$\sum_{n=\kappa-1}^{\infty} |\bar{\beta}_\kappa(n+1) - \bar{\beta}_\kappa(n)| = \sum_{n=\kappa-1}^{\infty} \left| e^{-x_0} \sum_{i=\kappa}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{x_0^{i-1}}{(i-1)!} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right| =$$

$$= \sum_{n=\kappa-1}^{\infty} \left| e^{-x_0} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{i+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \frac{x_0^i}{i!} - \right.$$

$$\left. - e^{-x_0} \sum_{i=1}^{\kappa-1} \frac{x_0^{i-1}}{\sqrt{i}\,(i-1)!} \right| \leqslant 0(1) + 0(1) \sum_{i=1}^{\kappa-1} \frac{1}{\sqrt{i}\,(i-1)!} \sum_{n=\kappa-1}^{\infty} \frac{n^{j-1}}{e^n} =$$

$$= 0(1) + 0(1) = 0(1).$$

Таким образом, условие (3) для B —метода выполнено. Осталось применить теорему 1.

ЛИТЕРАТУРА:

1. G. G. Lorentz. Tauberian theorems for absolute Summability. Arch Math., 5, 469 (954).