ОБ ОГИБАЮЩЕЙ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА ПРЕДЕЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

П. Т. СТЕПАНЕНКО, Б. С. ВАКАРЧУК

П. 1. В пространстве Лобачевского рассмотрим однопараметрическое семейство предельных поверхностей. Общий вид уравнения такого семейства в нормированных вейерштрассовых координатах x^i $(i=0, 1, 2, 3)$, будет

$$\sum_{k=1}^{3} A^{k}(u)\, x^{k} - A^{0}(u)\, x^{0} = -1, \tag{1}$$

где A^i связаны соотношением

$$\sum_{k=1}^{3} A^{k^2}(u) - A^{0^2}(u) = 0. \tag{2}$$

Положим

$$\xi^{k} = \frac{A^{k}}{A^{0}}. \tag{3}$$

При этом соотношение (2) запишется

$$\sum_{k=1}^{3} \xi^{k^2} = 1.$$

Отсюда следует, что ξ^k можно рассматривать как направляющие коэффициенты прямых, проходящих через начало координат. Обозначим через η^i $(i=0, 1, 2, 3)$ направляющие коэффициенты нормальной поверхности семейства (1). Тогда

$$\eta^i = -A^i + x^i; \qquad \sum_{k=1}^{3} \eta^{k^2} - \eta^{0^2} = 1, \tag{4}$$

здесь x^i — нормированные вейерштрассовы координаты точек поверхности, в которых рассматриваются нормали. Параметрические уравнения нормали имеют вид

$$X^i = X^i \operatorname{ch}\frac{t}{r} + (x^i - A^i)\operatorname{sh}\frac{t}{r}, \quad (i=0, 1, 2, 3), \tag{5}$$

t — параметр, $-\infty < t < \infty$.

Из начала координат проведем полупрямые, параллельные в некотором направлении нормалям (5). Пусть $B^к$ — направляющие коэффициенты этих полупрямых. Параметрические уравнения полупрямых с направляющими коэффициентами запишутся:

$$X^к = B^к \operatorname{sh} \frac{w}{r}, \qquad X^0 = \operatorname{ch} \frac{w}{r} \quad (k = 1, 2, 3), \tag{6}$$

где w—параметр $0 \leqslant w < \infty$. Так как полупрямые (6) должны быть параллельны соответствующим нормалям (5); то в силу одного из признаков параллельности прямых, заданных параметрическими уравнениями, должны иметь место равенства [2]:

$$A^к = \rho B^к. \quad A^0 = \rho \quad (k = 1, 2, 3),$$

где ρ — некоторый множитель. Исключая ρ и учитывая (3), получаем, что

$$B^к = \xi^к,$$

Таким образом, направляющие коэффициенты $\xi^к(u)$ определяют полупрямые, исходящие из начала координат и параллельные в некотором направлении нормалям поверхностей (1). К уравнению (1) присоединим уравнение

$$\sum_{к=1}^{3} A_u{}^к(u)\, x^к - A_u{}^0(u)\, x^0 = 1, \tag{7}$$

полученное дифференцированием левой части (1) по параметру u.

Легко видеть, что

$$\sum_{к=1}^{3} A_u{}^{к^2}(u) - A_u{}^{0^2}(u) > 0. \tag{8}$$

Из этого неравенства следует, что уравнение (7) определяет однопараметрическое семейство плоскостей. В силу соотношений (2) и неравенства (8), уравнения (1) и (7) совместны и независимы. Уравнения (1) и (7), рассматриваемые совместно, определяют на данной поверхности семейства предельную линию, которая будет характеристикой. Огибающая семейства поверхностей (1), как геометрическое место характеристик, представляет собой поверхность, состоящую из предельных линий. Огибающая поверхность в точках, общих с той или другой поверхностью семейства (1), будет иметь и общие с ней касательные плоскости.

Следовательно полупрямые

$$X^{к}=\xi^{к}(u)\,\mathrm{sh}\frac{t}{r}, \qquad X^{0}=\mathrm{ch}\frac{t}{r} \quad (k=1,2,3),$$

исходящие из начала координат, будут параллельны нормалям огибающей поверхности. Эти полупрямые в пересечении со сферой (s) радиуса t_0 с центром в начале координат определят сферическое отображение огибающей поверхности семейства (1). Так как направляющие коэффициенты $\xi^{к}$ зависят только от одной переменной, то сферическое отображение огибающей поверхности семейства (1) есть кривая.

Обратно, покажем, что если сферическим отображением некоторой поверхности является кривая, то эта поверхность есть огибающая однопараметрического семейства предельных поверхностей. Рассмотрим поверхность, заданную параметрическими уравнениями

$$x^{i}=x^{i}(u^{1},u^{2}), \quad (i=0,1,2,3), \quad \sum_{к=1}^{3} x^{к^2}-x^{0^2}=1. \tag{9}$$

Через η^{i} обозначим направляющие коэффициенты нормалей поверхности (9). Параметрические уравнения нормали в произвольной точке $(u^{1},\ u^{2})$ поверхности записываются

$$X^{i}=x^{i}(u^{1},u^{2})\,\mathrm{ch}\frac{v}{r}+\eta^{i}(u^{1},u^{2})\,\mathrm{sh}\frac{v}{r}, \quad (i=0,1,2,3). \tag{10}$$

Обозначим через g_{ij} и b_{ij} соответственно коэффициенты первой и второй квадратических форм поверхности (9). Тогда для коэффициентов α_{ij} метрической формы сферического отображения имеет [3]:

$$\alpha_{ij}=\frac{\left(\frac{1}{r^{2}}-K_{0}\right)g_{ij}-\left(H+\frac{2}{r}\right)b_{ij}}{(x^{0}+\eta^{0})^{2}}\,\mathrm{sh}^{2}\frac{t_{0}}{r}. \tag{11}$$

Здесь r — радиус кривизны пространства, K_0 и H соответственно полная и средняя кривизны поверхности (9), t_0 — радиус сферы. Для удобства, не уменьшая общности рассуждений, предположим, что поверхность (9) отнесена к линиям кривизны. При сферическом отображении сеть линий кривизны поверхности переходит в ортогональную сеть на сфере,

$\alpha_{12}=0$). Предположим теперь, что поверхность (9) отображается в кривую на сфере (S). Тогда один из коэффициентов метрической формы сферического отображения должен быть равен нулю, а другой коэффициент должен зависеть только от одной переменной. Пусть

$$\alpha_{11}=0, \quad \alpha_{22}=\varphi(u^2), \quad \varphi(u^2)>0.$$

При этих предположениях соотношения (11) запишутся

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{r^2}-K_0\right)g_{11}-\left(H+\frac{2}{r}\right)b_{11}=0,\\ &\left(\frac{1}{r^2}-K_0\right)g_{22}-\left(H+\frac{2}{r}\right)b_{22}=\varphi(u^2)\frac{(x^0+\eta^0)^2}{\operatorname{sh}^2\dfrac{t}{r}}\end{aligned}\right. \tag{12}$$

Если в первом равенстве (12) заменить K_0 и H их выражениями через g_{ij} и b_{ij}, то получим

$$\frac{b_{11}}{g_{11}}=\frac{1}{r}. \tag{13}$$

Деривационные формулы Вейнгартена для поверхности (9), отнесенной к линиям кривизны, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\eta^i}{\partial u^1}=-r\frac{b_{11}}{g_{11}}\frac{\partial x^i}{\partial u^1},\\ &\frac{\partial\eta^i}{\partial u^2}=-r\frac{b_{22}}{g_{22}}\frac{\partial x^i}{\partial u^2} \qquad (i=0,1,2,3)\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Положим

$$x^i+\eta^i=\psi^i(u^1,u^3). \tag{15}$$

Продифференцировав (15) по u^1 и заменив $\dfrac{\partial\eta^i}{\partial u^1}$ правой частью (14), получим

$$\left(1-r\frac{b_{11}}{g_{11}}\right)\frac{\partial x^i}{\partial u^1}=\frac{\partial\psi^i}{\partial u^1}.$$

Отсюда, учитывая (13), следует, что

$$\frac{\partial\psi^i}{\partial u^1}=0.$$

Таким образом, $x^i + \eta^i$ зависят только от u^2.

$$x^i + \eta^i = \psi^i(u^2); \quad \sum_{\kappa=1}^{3} \psi^{\kappa^2}(u) - \psi^{0^2}(u) = 0, \quad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{16}$$

Для направляющих коэффициентов ξ^κ радиусов-векторов сферического отображения поверхности (9) имеем

$$\xi^\kappa = \frac{x^\kappa + \eta^\kappa}{x^0 + \eta^0} = \frac{\psi^\kappa(u^2)}{\psi^0(u^2)} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Если умножим каждое из соотношений (16) соответственно на x^i (i=0, 1, 2, 3), после чего сложим последние три и вычтем первое, то получим

$$\sum_{\kappa=1}^{3} \psi^\kappa(u^2)\, x^\kappa - \psi^0(u^2)\, x^0 = -1.$$

Мы пришли к соотношению вида (1), выражающему, что поверхность (9) является огибающей однопараметрического семейства предельных поверхностей. Итак,

ТЕОРЕМА: Огибающие однопараметрического семейства предельных поверхностей и только эти поверхности отображаются в кривые на сфере.

Отметим, что рассматриваемые поверхности с точки зрения сферического отображения ведут себя как развертывающиеся поверхности евклидового пространства.

Воспользовавшись соотношениями (12), где K_0 и H заменены сответствующими выражениями через g_{ij} и b_{ij} и уравнениями Кодации, что метрика огибающих однопараметрического семейства поверхностей является евклидовой.

II. 2. Совместно с уравнениями (1) и (7) рассмотрим уравнение

$$\sum_{\kappa=1}^{3} A^\kappa_{uu}(u)\, x^\kappa - A^0_{uu}(u)\, x^0 = 0, \tag{17}$$

где $\quad A^i_{uu} = \dfrac{d^2 A^i}{du^2}$.

Если

$$\sum_{\kappa=1}^{3} A^{\kappa^2}_{uu} - A^{0^2}_{uu} > 0, \tag{18}$$

то уравнения (1), (7) и (17) определяют на каждой поверхности семейства (1) по крайней мере одну предельную точку. Геометрическое место этих точек называем ребром возврата. Параметрические уравнения ребра возврата получим, определяя x^i из уравнения (1), (7), (17) через параметр u и рассматривая последний как переменный параметр.

Положим

$$\Delta^1 = \begin{vmatrix} A^0 & A^2 & A^3 \\ A^0_u & A^2_u & A^3_u \\ A^0_{uu} & A^2_{uu} & A^3_{uu} \end{vmatrix}, \quad \Delta^2 = \begin{vmatrix} A^1 & A^0 & A^3 \\ A^1_u & A^0_u & A^3_u \\ A^1_{uu} & A^0_{vu} & A^3_{uu} \end{vmatrix}, \quad \Delta^3 = \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^0 \\ A^1_u & A^2_u & A^0_u \\ A^1_{uu} & A^2_{uu} & A^0_{uu} \end{vmatrix},$$

$$\Delta^0 = \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ A^1_u & A^2_u & A^3_u \\ A^1_{uu} & A^2_{uu} & A^3_{uu} \end{vmatrix}, \quad \delta^1 = \begin{vmatrix} A^3_u & A^2_u \\ A^3_{uu} & A^2_{uu} \end{vmatrix}, \quad \delta^2 = \begin{vmatrix} A^1_u & A^3_u \\ A^1_{uu} & A^3_{uu} \end{vmatrix},$$

$$\delta^3 = \begin{vmatrix} A^2_u & A^1_u \\ A^2_{uu} & A^1_{uu} \end{vmatrix}.$$

В этих обозначениях параметрические уравнения ребра возврата в нормированных вейерштрассовых координатах запишутся

$$\left.\begin{aligned} x^k &= \Delta^k \varphi + \frac{\delta^k}{\Delta} \quad (k = 1, 2, 3), \\ x^0 &= \Delta^0 \varphi \end{aligned}\right\}, \tag{19}$$

где $\varphi(u)$ является решением квадратного уравнения

$$\left(\sum_{k=1}^{3} \Delta^{k^2} - \Delta^{0^2}\right)\varphi^2 + \frac{2\varphi}{\Delta^0}\sum_{k=1}^{3} \Delta^k \delta^k - \sum_{k=1}^{3} \frac{\delta^{k^2}}{\Delta^{0^2}} + 1 = 0 \tag{20}$$

Отметим, что это уравнение при условии (18) всегда имеет действительные решения. То, что для φ имеем два значения, связано со свойствами параллелизма в пространстве Лобачевского. Легко видеть, что ребро возврата вырождается в точку тогда, когда существуют такие числа C^i $(i=0, 1, 2, 3)$, что

$$\delta^k + C^k \Delta^0 - \Delta^k C^0 = 0. \tag{21}$$

В частности, если учесть выражения для Δ^i и δ^i то из (21) получаем, что начало координат будет ребром возврата, когда $A^0=1$. Перейдем от нормированных вейерштрассовых координат к конформно декартовым координатам x, y, z по формулам

$$x^1=\frac{x^2+y^2+z^2-4}{4x}, \quad x^2=\frac{y}{x}, \quad x^3=\frac{z}{x},$$
$$x^0=\frac{x^2+y^2+z^2+4}{4x}.$$

При этом переходе пространство Лобачевского конформно отображается на евклидово полупространство $x>0$; плоскость $x=0$ — абсолют. Однопараметрическое семейство предельных поверхностей перейдет в однопараметрическое семейство сфер

$$\left(x+\frac{2}{A^1-A^0}\right)^2+\left(y+\frac{2A^2}{A^1-A^0}\right)^2+\left(z+\frac{2A^3}{A^1-A^0}\right)^2-$$
$$-\frac{4}{(A^1-A^0)^2}=0. \qquad (22)$$

Сферы этого семейства касаются плоскости $x=0$. Геометрическое место точек касания представляют собой кривую

$$y=-\frac{2A^2}{A^1-A^0}, \quad z=-\frac{2A^3}{A^1-A^0}, \quad A^i=A^i(u). \qquad (23)$$

Если (22) продифференцировать по u, то получим однопараметрическое семейства плоскостей

$$(A_u{}^1-A_u{}^0)\,x+[A_u{}^2(A^1-A^0)-A^2(A_u{}^1-A_u{}^0)]\,y+$$
$$+[A_u{}^3(A^1-A^0)-A^3(A_u{}^1-A_u{}^0)]\,z+A^1A_u{}^0-A_u{}^1A^0=0. \quad (24)$$

Эти плоскости проходят через точки кривой (23) и перпендикуляры соответствующим касательным геометрического места центров сфер. Точки пересечения касательных к геометрическому месту центров сфер с соответствующими плоскостями (22) является центрами окружностей — характеристических кривых. Геометрическое место этих центров легко находится. Огибающая семейства (22) является трубчатой поверхностью [1], касающаяся плоскости $x=0$ по кривой (23).

ЛИТЕРАТУРА:

1. В. Ф. Каган, Теория поверхностей, ч. I, 1947 г.

2. Ю. Н. Ястребов, Б. С. Вакарчук, О некоторых аналитических признаках расположения прямых в пространстве Лобачевского. Труды Ленинградского института инженеров водного транспорта, вып. XXVI, 1959 г.

3. Б. С. Вакарчук, О сферическом отображении кривых и поверхностей в пространстве Лобачевского, УМЖ, № 1, 1960.

О приближении линейной функцией в L_2

В. Ф. СТОРЧАЙ.

Теорема. Пусть $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, К — произвольное положительное число и $h>0$ удовлетворяет уравнению $\omega(h)=Kh$

Пусть для функции $\Delta(x)=f(x)-l(x)$, где $f(x)\epsilon H_\omega$ и $l(x)=\pm Kx+\beta$ на промежутке $[a, b]$, $b-a\leqslant h$ выполнены следующие условия:

1. $$\int_a^b \Delta(t)\,dt=0,$$

2. $$l'(x)=-K\operatorname{sign}\int_a^x \Delta(t)\,dt,$$

3. $\Delta(x)$ меняет знак на (a, b) в единственной точке c.

Тогда

$$\int_з^b \Delta^2(t)\,td\leqslant\frac{1}{4}\int_0^{b-a}[\omega(t)-Kt]^2\,dt \tag{1}$$

причем оценка на классе функций $f(x)\epsilon H_\omega$ точная.

Доказательство. При доказательстве этой теоремы используется метод, который применялся Н. П. Корнейчуком при решении аналогичных экстремальных задач (см. [1], [2], [3]). Для определенности рассмотрим случай, когда $l(x)$ имеет вид $l(x)=Kx+\beta$. Тогда из предположений, сделанных в