В этом соотношении знак равенства нельзя отбросить. Действительно, зададим на $[a, b]$ функцию

$$f_0(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}\omega\left[2\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\right] & \frac{a+b}{2}\leqslant t\leqslant b \\ -\frac{1}{2}\omega\left[-2\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\right] & a\leqslant t\leqslant\frac{a+b}{2}\end{cases}$$

и возьмем $l(t)=K\left(t-\frac{a+b}{2}\right)$. Легко проверить, что $f_0(t)\in H_\omega$, функции $f_0(t)$ и $l(t)$ удовлетворяют всем условиям теоремы,

$$\int_a^b [f_0(t)-l(t)]^2\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{b-a}[\omega(t)-Kt]^2\,dt.$$

В случае, когда $l(x)$ имеет вид $l(x)=-Kx+\beta$ рассуждения аналогичны.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Н. П. Корнейчук, О наилучшем равномерном приближении дифференцируемых функций, Доклады АН СССР, 141 (1961), 304—307.

2. Н. П. Корнейчук, О наилучшем равномерном приближении непрерывных функций, Докторская диссертация, г. Москва, 1963.

3. Н. П. Корнейчук, О линейных методах приближения периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица, Сборник работ механико-математических кафедр ДГУ, выпуск 6 (1961), 92—96.

О ПРИБЛИЖЕНИИ В СРЕДНЕМ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИЯМИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИМИ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА

С. П. ТУРОВЕЦ.

Обозначим через $KH^{(\alpha)}$ класс функций $f(x)$ периода 2π удовлетворяющих на всей действительной оси условию Липшица

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant K|x'-x''|^\alpha \quad (0\leqslant\alpha\leqslant 1)$$

и через H_ω — класс непрерывных периодических с периодом 2π функций, модуль непрерывности которых

$$\omega(f, t) = \sup_{|x'-x''| \leqslant t} |f(x') - f(x'')|$$

не превышает заданного модуля непрерывности $\omega(t)$.

Докажем следующую теорему.

Теорема. Если $f \in H_\omega$, где $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то для любого числа $K>0$ в классе $KH^{(1)}$ найдется функция φ_0 такая, что

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi_0(x)|\, dx \leqslant \pi \max_{x>0} \frac{1}{x} \int_0^x [\omega(t) - |K|\, t]\, dt. \tag{1}$$

Доказательство теоремы опирается на следующее утверждение.

Лемма. Пусть $f \in H_\omega$, где $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности. Если для функции

$$\Delta(x) = f(x) - f(c) - |K|(x - c)$$

на отрезке $[a, b]$ выполнены соотношения

$$-\frac{1}{c-a}\int_a^c \Delta(x)\, dx = \frac{1}{b-c}\int_c^b \Delta(x)\, dx > 0, \tag{2}$$

то

$$\int_a^b |\Delta(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{b-a} [\omega(t) - |K|\, t]\, dt. \tag{3}$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\begin{aligned} &\Delta(x) < 0 \qquad (a \leqslant x < c) \\ &\Delta(x) > 0 \qquad (c < x \leqslant b). \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим величину

$$M(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b |\Delta(x)|\, dx.$$

В силу равенства (2) и соотношений (4)

$$M(f)=\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{c-a}\int_a^c\Delta(x)\,dx+\frac{1}{b-c}\int_c^b\Delta(x)\,dx\right\}$$

Сделаем замену переменной во втором интеграле, положив

$$x=c+\frac{b-c}{c-a}(c-y).$$

Получим

$$\frac{1}{b-c}\int_c^b\Delta(x)\,dx=\frac{1}{c-a}\int_a^c\Delta\left[c+\frac{b-c}{c-a}(c-y)\right]dy.$$

Поэтому

$$M(f)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{c-a}\int_a^c\left\{\Delta\left[c+\frac{b-c}{c-a}(c-x)\right]-\Delta(x)\right\}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{c-a}\int_a^c\left\{f\left[c+\frac{b-c}{c-a}(c-x)\right]-f(x)-|K|\times\right.$$

$$\left.\times\frac{b-a}{c-a}(c-x)\right\}dx\leqslant\frac{1}{2}\,\frac{1}{c-a}\int_a^c\left\{\omega\left[\frac{b-a}{c-a}(c-x)\right]-\right.$$

$$\left.-|K|\frac{b-a}{c-a}(c-x)\right\}dx.$$

Положив теперь,

$$\frac{b-a}{c-a}(c-x)=u$$

получим

$$M(f)\leqslant\frac{1}{2}\,\frac{1}{b-a}\int_0^{b-a}[\omega(u)-Ku]\,du$$

откуда и следует неравенство (3).

Доказательство теоремы. Впишем в график функции $f(x)$ ломанную $g(x)$. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_p$ звенья ломанной $g(x)$, на отрезке $[a, b]$, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ — соответствующие угловые коэффициенты. Предположим, что $g(x) \in KH^{(1)}$, т.е., что ломанная $g(x)$ имеет звенья с угловыми коэффициентами по абсолютной величине большими K. Пусть $\alpha_к > K$. Тогда найдутся точки $y_к' < x_к < y_к''$ такие, что отрезок $[y_к', y_к'']$ содержит внутри себя абсциссы концов звена $l_к$ и, если положить

$$\tau_к(x) = g(x_к) + K(x - x_к),$$

$$\Delta_к(x) = g(x) - \tau_к(x),$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \Delta_к(x)\,dx = I_к(a, b),$$

то будут выполняться следующие соотношения

$$I_к(y_к', x_к) = \min_{x \leqslant x_к} I_к(x, x_к) < 0$$

$$I_к(x_к, y_к'') = \max_{x > x_к} I_к(x_к, x) > 0$$

и

$$-I_к(y_к', x_к) = I_к(x_к, y_к''). \tag{5}$$

То, что равенство (5) всегда можно осуществить следует из следующих соображений. Запишем уравнение прямой $\tau_к(x)$ в виде

$$\tau_к(x) = Kx + b,$$

где K фиксировано, а b изменяется в пределах от b_1 до b_2. Тогда $I_к(y_к', x_к)$ и $I_к(x_к, y_к'')$ будут функциями от b. Функция $A_1(b) = -I_к(y_к', x_к)$ неотрицательна и на промежутке $[b_1, b_2]$ возрастает, причем $A_1(b_1) = 0$, а функция $A_2(b) = I_к(x_к, y_к'')$ также неотрицательна на отрезке $[b_1, b_2]$ и $A_2(b_2) = 0$. Отсюда следует, что при некотором значении b^*, $(b_1 \leqslant b^* \leqslant b_2)$, $A_1(b^*) = A_2(b^*)$.

Обозначим через $\Theta_к^+ = [t_к', t_к'']$ отрезок оси х-ов, содержащий внутри себя отрезок $[y_к', y_к'']$, концы которого удовлетворяют соотношениям

$$\min_{x \leqslant x_к} \int_x^{x_к} \Delta_к(x)\,dx = \int_{t_к'}^{x_к} \Delta_к(x)\,dx$$

$$\max_{x \geqslant x_к} \int_{x_к}^{x} \Delta_к(x)\,dx = \int_{x_к}^{t_к''} \Delta_к(x)\,dx$$

Как показано в работе [2] любые два $\Theta_к^+$ — отрезка не имеют общих точек.

Построим на всей действительной оси 2π—периодическую функцию $\overline{g}(x)$, положив

$$\overline{g}(x) = \begin{cases} \tau_к(x) & (x \in \Theta_к^+) \\ g(x) & (x \overline{\in} \Theta_к^+) \end{cases}$$

Предположим, что ломанная $\overline{g}(x) \overline{\in} KH^{(\alpha)}$ т. е. она имеет звенья с угловыми коэффициентами $\overline{\alpha}_к < -K$. Если $\overline{\alpha}_к < -K$, то найдутся такие точки $y_к' < x_к < y_к''$, что отрезок $[y'_к, y_к'']$ содержит абсциссы концов соответствующего звена $\overline{l}_к$ и, если положить

$$\overline{\tau}_к(x) = g(x_к) - K(x - x_к)$$

$$\overline{\Delta}_к(x) = \overline{g}(x) - \tau_к(x)$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \overline{\Delta}_к(x)\,dx = \overline{I}_к(a, b)$$

то будем иметь

$$\overline{I}_к(y_к', x_к) = \max_{x \leqslant x_к} \overline{I}_к(x, x_к) > 0$$

$$I_к(x_к, y_к'') = \min_{x \geqslant x_к} \overline{I}_к(x_к, x) < 0$$

и

$$\overline{I}_к(y', x_к) = -\overline{I}_к(x_к, y_к''.$$

Через $\Theta_к^-$ будем обозначать такой отрезок $[t_к', t_к'']$, который содержит внутри себя отрезок $[y_к' y_п'']$ и для концов которого выполняются соотношения

$$\max_{x \leqslant x_к} \int_x^{x_к} \overline{\Delta}_к(x)\,dx = \int_{t_к'}^{x_к} \overline{\Delta}_к(x)\,dx$$

$$\min_{x \geqslant x_к} \int_{x_к}^{x} \overline{\Delta}_к(x)\,dx = \int_{x_к}^{t_к''} \overline{\Delta}_к(x)\,dx.$$

Положим теперь

$$\varphi(x) = \begin{cases} \overline{\tau}_к(x) & (x \in \overline{\Theta}_к^-) \\ \overline{g}(x) & (x \overline{\in} \overline{\Theta}_к^-) \end{cases}$$

Очевидно $\varphi(x)$ — периодическая с периодом 2π функция, принадлежащая классу $KH^{(1)}$. Обозначим через $0=a_1<a_2<\ldots<a_q=2\pi$ вершины ломанной $\varphi(x)$. Тогда будем иметь

$$\int\limits_0^{2\pi}|g(x)-\varphi(x)|\,dx=\sum_{k=1}^{q-1}\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}}|g(x)-\varphi(x)|\,dx=$$

$$=\sum_{k=1}^{q-1}\left\{\frac{1}{\Delta a_k}\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}}|g(x)-\varphi(x)|\,dx\right\}\Delta a_k\leqslant$$

$$\leqslant\max_k\frac{1}{\Delta a_k}\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}}|g(x)-\varphi(x)|\,dx\sum_{k=1}^{q-1}\Delta a_k=$$

$$=2\pi\max_k\frac{1}{\Delta a_k}\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}}|g(x)-\varphi(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi\max_k\frac{1}{y_k''-y_k'}\int\limits_{y_k'}^{y_k''}|g(x)-\varphi(x)|\,dx.$$

Если полигональная функция $g(x)$ вписана в $f\in H_\omega$, где $\omega(t)$ — выпукла вверх, то как отмечено в работе [1], $g(x)\in H_\omega$. Поэтому, на основании леммы, будем иметь

$$\int\limits_{y_k'}^{y_k''}|g(x)-\varphi(x)|\,dx\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^{y_k''-y_k'}[\omega(t)-|K|\,t]\,dt$$

и

$$\int\limits_0^{2\pi}|g(x)-\varphi(x)|\,dt\leqslant\pi\max_{x\geqslant0}\frac{1}{x}\int\limits_0^{x}[\omega(t)-|K|\,t]\,dt.$$

Так как в любую непрерывную функцию $f(x)$ можно вписать ломанную $g(x)$ так, чтобы $\int\limits_0^{2\pi}|f(x)-g(x)|<\varepsilon$, где ε может быть сколь угодно малым, то при выполнении условий теоремы нетрудно доказать существование функции $\varphi_0(x)\in KH^{(1)}$, для которой выполняется неравенство (1).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Н. П. Корнейчук, ДАН СССР, 140, № 4, (1961).
2. Н. П. Корнейчук, О наилучшем равномерном приближении непрерывных функций. Докторская диссертация, М., 1963.
3. Н. П. Корнейчук, ДАН СССР, 141, № 2. (1961).

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КРИВИЗНЫ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

С. И. ФЕДИЩЕНКО.

В статье рассматривается три типа кривизны риманова пространства V_n $(n>3)$: риманова кривизна по отношению к трехмерным площадкам [1], конформная кривизна по отношению к двумерным площадкам и конформная кривизна по отношению к двумерным площадкам и конформная кривизна по отношению к трехмерным площадкам. Исследуется вопрос об инвариантности конформных кривизн при изменении в точке направления двумерной и трехмерной площадок соответственно, а также об инвариантности трех типов кривизн при параллельном перенесении соответствующих площадок.

1. Известно, что требование неизменности римановой кривизны пространства при параллельном перенесении двумерной площадки приводит к симметрическим пространствам, характеризующимся условиями ([2], стр. 117).

$$R_{hijk,\,l}=0,$$

где запятой обозначена ковариантная производная тензора кривизны относительно метрического тензора g_{ij}.

Риманова кривизна пространства V_n по отношению к трехмерной площадке $\{\underset{1}{\lambda^i}, \underset{2}{\lambda^i}, \underset{3}{\lambda^i}\}$ определяется формулой ([1], стр. 270)

$$\frac{P}{2}\begin{vmatrix} g_{ij} & g_{hj} & g_{sj} \\ g_{ik} & g_{hk} & g_{sk} \\ g_{it} & g_{ht} & g_{st} \end{vmatrix} \underset{1}{\lambda^i}\,\underset{1}{\lambda^i}\,\underset{2}{\lambda^h}\,\underset{2}{\lambda^k}\,\underset{3}{\lambda^s}\,\underset{3}{\lambda^t}=(R_{ikhj}\,g_{st}+R_{sijt}\,g_{hk}+$$

$$+R_{hstk}\,g_{ij}+2R_{ihjs}\,g_{kt}+2R_{ihsk}\,g_{jt}-2R_{isht}\,g_{jk})\,\underset{1}{\lambda^i}\,\underset{1}{\lambda^j}\,\underset{2}{\lambda^h}\,\underset{2}{\lambda^k}\,\underset{3}{\lambda^s}\,\underset{3}{\lambda^f}.$$