ЛИТЕРАТУРА:

1. Н. П. Корнейчук, ДАН СССР, 140, № 4, (1961).
2. Н. П. Корнейчук, О наилучшем равномерном приближении непрерывных функций. Докторская диссертация, М., 1963.
3. Н. П. Корнейчук, ДАН СССР, 141, № 2, (1961).

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КРИВИЗНЫ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

С. И. ФЕДИЩЕНКО.

В статье рассматривается три типа кривизны риманова пространства V_n $(n>3)$: риманова кривизна по отношению к трехмерным площадкам [1], конформная кривизна по отношению к двумерным площадкам и конформная кривизна по отношению к двумерным площадкам и конформная кривизна по отношению к трехмерным площадкам. Исследуется вопрос об инвариантности конформных кривизн при изменении в точке направления двумерной и трехмерной площадок соответственно, а также об инвариантности трех типов кривизн при параллельном перенесении соответствующих площадок.

1. Известно, что требование неизменности римановой кривизны пространства при параллельном перенесении двумерной площадки приводит к симметрическим пространствам, характеризующимся условиями ([2], стр. 117).

$$R_{hijk,\,l}=0,$$

где запятой обозначена ковариантная производная тензора кривизны относительно метрического тензора g_{ij}.

Риманова кривизна пространства V_n по отношению к трехмерной площадке $\{\lambda^i_1,\ \lambda^i_2,\ \lambda^i_3\}$ определяется формулой ([1], стр. 270)

$$\frac{P}{2}\begin{vmatrix} g_{ij} & g_{hj} & g_{sj}\\ g_{ik} & g_{hk} & g_{sk}\\ g_{it} & g_{ht} & g_{st}\end{vmatrix}\lambda^i_1\,\lambda^i_1\,\lambda^h_2\,\lambda^k_2\,\lambda^s_3\,\lambda^t_3=(R_{ikhj}\,g_{st}+R_{sijt}\,g_{hk}+$$

$$+R_{hstk}\,g_{ij}+2R_{ihjs}\,g_{kt}+2R_{ihsk}\,g_{jt}-2R_{isht}\,g_{jk})\,\lambda^i_1\,\lambda^j_1\,\lambda^h_2\,\lambda^k_2\,\lambda^s_3\,\lambda^f_3.$$

Исследования показывают, что единственными нетривиальными пространствами постоянной кривизны по отношению к трехмерным площадкам являются V_4 Эйнштейна, и только они.

Потребуем, чтобы риманова кривизна P пространства V_n по отношению к трехмерным площадкам оставалась неизменной при параллельном перенесении трехмерной площадки в произвольном направлении. Это приводит нас к следующим условиям

$$\begin{aligned}
&2(R_{ihjk,l}+R_{jhik,l})g_{st}+2(R_{hskt,l}+R_{ksht,l})g_{ij}+\\
&+2(R_{isjt,l}+R_{jsit,l})g_{hk}+(R_{ihks,l}+R_{ikhs,l})g_{jt}+\\
&+(R_{jhks,l}+R_{jkhs,l})g_{it}+(R_{ihkt,l}+R_{ikht,l})g_{js}+\\
&+(R_{jhkt,l}+R_{jkht,l})g_{is}+(R_{hijs,l}+R_{hjis,l})g_{kt}+\\
&+(R_{kijs,l}+R_{kjis,l})g_{ht}+(R_{hijt,l}+R_{hjit,l})g_{ks}+\\
&+(R_{kijt,l}+R_{kjit,l})g_{hs}+(R_{hsti,l}+R_{htsi,l})g_{jk}+\\
&+(R_{ksti,l}+R_{ktsi,l})g_{jh}+(R_{hstj,l}+R_{htsj,l})g_{ik}+\\
&+(R_{kstj,l}+R_{ktsj,l})g_{ih}=0.
\end{aligned} \tag{1}$$

В результате свертывания (1) с g^{st} найдем

$$(n-4)R_{jihk,l}-R_{jh,l}g_{ik}-R_{ik,l}g_{jh}+R_{jk,l}g_{ih}+R_{ih,l}g_{jk}=0. \tag{2}$$

Отсюда путем дальнейшего свертывания получим (при $n>3$)

$$R_{ih,l}=0. \tag{3}$$

Соотношения (2) при $n=4$ будут выполнены тождественно вследствие (3), а при $n>4$ дают нам симметрическое пространство. Очевидно, что любое симметрическое пространство удовлетворяет условиям (1).

Рассмотрим отдельно случай $n=4$. Пространство V_4, сохраняющее римоанову кривизну по отношению к трехмерной площадке при ее параллельном перенесении в произвольном направлении, по необходимости должно удовлетворять условию (3). Докажем достаточность этого условия.

Возьмем систему координат, ортогональную в точке M_0. Тогда в этой системе координат в данной точке $g_{ik}=0$ $(i\neq k)$. Соотношения (1) примут вид

$$\left.\begin{aligned}
&g_{ii}R_{hssh,l}+g_{hh}R_{issi,l}+g_{ss}R_{ihhi,l}=0,\\
&g_{ii}R_{shht,l}+g_{hh}R_{siit,l}=0, \quad (l=i,h,s,t;\ i,h,s,t\neq)
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Их можно преобразовать к виду

$$R_{,l} - 2g^{tt}R_{tt,l} = 0; \quad R_{st,l} = 0 \quad (s \neq t).$$

В силу (3) соотношения (5) выполняются тождественно, а значит выполняются тождественно и эквивалентные им соотношения (4). Таким образом, в точке M_0 в специальной системе координат в каждом V_4 тождественно выполняются условия (1) вследствие (3). Поскольку M_0 — произвольная точка пространства, а соотношения (1) носят тензорный характер, то они выполняются тождественно вследствие (3) для каждого V_4 в каждой точке и в любой системе координат.

К такому же результату придем, если потребуем, чтобы риманова кривизна пространства V_n по отношению к трехмерным площадкам сохранялась при параллельном перенесении трехмерной площадки в направлении самой площадки.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Для того, чтобы риманова кривизна пространства V_n по отношению к трехмерным площадкам оставалась неизменной при параллельном перенесении трехмерной площадки, необходимо и достаточно, чтобы пространство V_n при $n>4$ было симметрическим, а при $n=4$ — пространством с ковариантно постоянным тензором Риччи.

2. Введем понятие конформной кривизны пространства $V_n (n>3)$.

Величина

$$B = \frac{C_{hijk,l}\,\underset{1}{\lambda}^h \underset{1}{\lambda}^j \underset{2}{\lambda}^i \underset{2}{\lambda}^k}{(g_{hj}\,g_{ik} - g_{ij}\,g_{hk})\,\underset{1}{\lambda}^h \underset{1}{\lambda}^j \underset{2}{\lambda}^i \underset{2}{\lambda}^k}, \tag{6}$$

где C_{hijk} — тензор конформной кривизны, не зависит от выбора двух линейно независимых векторов $\underset{1}{\lambda}^i \underset{2}{\lambda}^i$, определяющих данную двумерную площадку в данной точке пространства V_n. Будем называть этот инвариант конформной кривизной пространства V_n в данной точке для данной двумерной площадки.

Для того чтобы V_n было пространством постоянной конформной кривизны, необходимо и достаточно, чтобы оно было конформно-плоским, как это следует из (6).

Потребуем, чтобы конформная кривизна пространства сохранялась при параллельном перенесении двумерной площадки в любом направлении или в направлении самой площадки. Это требование приводит нас к конформно-симметрическим пространствам, характеризующимися условиями [3]:

$$C_{hijk,\,l} = 0.$$

3. Величина C, определяемая формулой

$$\frac{C}{2}\begin{vmatrix} g_{ij} & g_{hj} & g_{sj} \\ g_{ik} & g_{hk} & g_{sk} \\ g_{it} & g_{ht} & g_{st} \end{vmatrix} \underset{1}{\lambda^i}\underset{1}{\lambda^j}\underset{2}{\lambda^h}\underset{2}{\lambda^k}\underset{3}{\lambda^s}\underset{3}{\lambda^t} = (C_{ikhj}\, g_{st} + C_{sijt}\, g_{hk} + C_{hstk}\, g_{ij} +$$

$$+ 2\, C_{ihjs}\, g_{kt} + 2\, C_{ihsk}\, g_{jt} + 2\, C_{isht}\, g_{jk})\, \underset{1}{\lambda^i}\underset{1}{\lambda^j}\underset{2}{\lambda^h}\underset{2}{\lambda^k}\underset{3}{\lambda^s}\underset{3}{\lambda^t}$$

не зависит от выбора трех линейно независимых векторов $\underset{1}{\lambda^i}, \underset{2}{\lambda^i}, \underset{3}{\lambda^i}$, определяющих данную трехмерную площадку в фиксированной точке пространства V_n. Назовем этот инвариант C конформной кривизной пространства V_n в данной точке по отношению к данной трехмерной площадке:

а) Если в любой точке пространства V_n его конформная кривизна по отношению к трехмерным площадкам не зависит от выбора этих площадок, то такое V_n будем называть пространством постоянной конформной кривизны по отношению к трехмерным площадкам.

Исследование необходимых и достаточных условий того, что V_n является пространством постоянной конформной кривизны по отношению к трехмерным площадкам показывает, что $C=0$, вследствие чего эти условия принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} &2\,(C_{ihjk} + C_{jhik})\, g_{st} + 2\,(C_{hskt} + C_{ksht})\, g_{ij} + 2\,(C_{isjt} + C_{jsit})\, g_{hk} + \\ &+ (C_{ihks} + C_{ikhs})\, g_{jt} + (C_{jhks} + C_{jkhs})\, g_{it} + (C_{ihkt} + C_{ikht})\, g_{js} + \\ &+ (C_{jhkt} + C_{jkht})\, g_{is} + (C_{hijs} + C_{hjis})\, g_{kt} + (C_{kijs} + C_{kjis})\, g_{ht} + \\ &+ (C_{hijt} + C_{hjit})\, g_{ks} + (C_{kijt} + C_{kjit})\, g_{hs} + (C_{hsti} + C_{htsi})\, g_{jk} + \\ &+ (C_{ksti} + C_{ktsi})\, g_{jh} + (C_{hstj} + C_{htsj})\, g_{ik} + (C_{kstj} + C_{ktsj})\, g_{ih} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Свернув (7) с g^{st} после элементарных проеобразований получим

$$(n-4)\, C_{ijkh} = 0. \tag{8}$$

Отсюда следует, что V_n при $n>4$ будет конформно-плоским. При $n=4$ условия (8) выполняются тождественно. Поэтому рассмотрим отдельно случай $n=4$.

Возьмем систему координат, ортогональную в точке M_0. В этой системе координат в данной точке условия (7) запишутся в виде

$$g_{ss} C_{i*hi} + g_{ii} C_{shbs} + g_{hh} C_{issi} = 0,$$
$$g_{ii} C_{shht} + g_{hh} C_{siit} = 0 \quad (i, h, s, t \neq).$$

Подставляя сюда вместо компонент тензора конформной кривизны их выражения через компоненты тензора кривизны в рассматриваемой системе координат, убеждаемся, что эти условия выполняются тоджественно. Таким образом, приходим к следующему выводу: *любое V_4 является пространством постоянной конформной кривизны (равной нулю) по отношению к трехмерным площадкам; при $n>4$ таким свойством обладают лишь конформно-плоские пространства.*

Примером нетривиального пространства постоянной конформной кривизны по отношению к трехмерным площадкам является V_4 с метрикой

$$ds^2 = \sqrt{2}\; e^{-x^1} \left[\frac{(dx^1)^2}{2\, sh\, x^1} + sh\, x^1 \, (dx^2)^2 \right] +$$
$$+ sh\, x^1 \, e^{2x^2 - x^1} \left[e^{\sqrt{3} \ln \left| th \frac{x^1}{2} \right|} (dx^3)^2 + e^{\sqrt{3} \ln \left| th \frac{x^1}{2} \right|} (dx^1)^2 \right].$$

Непосредственные вычисления показывают, что это V_4 не является конформно-плоским, а значит не является пространством постоянной конформной кривизны по отношению к двумерным площадкам. К тому же, оно не является пространством постоянной римановой кривизны как по отношению к трехмерным, так и по отношению к двумерным площадкам.

б) Потребуем, чтобы конформная кривизна пространства V_n по отношению к трехмерным площадкам оставалась неизменной при параллельном перенесении трехмерной площадки в любом направлении. В результате мы придем к условиям вида (1), где вместо ковариантных производных тензора кривизны будут стоять ковариантные производные тензора конформной кривизны. Отсюда путем рассуждений, аналогичных тем, которые мы проводили по отношению к условиям (1), приходим к выводу, что V_n является конформно-симметрическим пространством при $n>4$ или любым V_4 (в соответствии с п. а)).

К такому же выводу придем, если потребуем, чтобы конформная кривизна пространства V_n по отношению к трехмерным площадкам оставалась неизменной при параллельном перенесении трехмерной площадки в направлении самой площадки.

Примером нетривиального пространства, сохраняющего конформную кривизну по отношению к трехмерным площадкам при их параллельном перенесении, является V_4 с метрикой (9). Нетривиальность здесь понимается в том смысле, что это V_4, не являясь конформно-симметрическим пространством, не сохраняет конформной кривизны по отношению к двумерным площадкам при их параллельном перенесении.

В заключение отметим наблюдающиеся здесь две аналогии.

Для каждой из рассматриваемых здесь трех типов кривизн имеет место аналог теоремы Шура: если каждая из этих кривизн в каждой точке пространства не зависит от направления площадки, то она остается постоянной и при переходе от точки к точке. Для римановой кривизны пространства по отношению к трехмерным площадкам этот факт установлен ранее [1], а для конформных кривизн вытекает из вышеизложенного.

Известно, что всякое риманово пространство постоянной римановой кривизны (в общепринятом смысле) сохраняет риманову кривизну при параллельном перенесении двумерной площадки, но V_n, сохраняющее риманову кривизну при параллельном перенесении двумерной площадки, не обязано быть пространством постоянной кривизны. Для рассматриваемых трех типов кривизн пространства V_n имеет место аналогичное утверждение с тем, однако, исключением что любое V_4 сохраняет конформную кривизну по отношению к трехмерным площадкам при их параллельном перенесении, и является пространством постоянной конформной кривизны по отношению к трехмерным площадкам.

ЛИТЕРАТУРА:

1. С. И. Федищенко и В. М. Черныщенко, Об одном обобщении пространства постоянной кривизны, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 11, 1961, стр. 269—276.

2. Э. Картан, Геометрия групп Ли и симметрические пространства, М., ИЛ., 1949.

3. Chaki M. C., Gupta Bandana, On conformally symmetric zpaces, „Indian I. Math.", 1963, 5, N2.