О СХОДИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

В. М. ЧЕРНЫШЕНКО.

Пусть $P(x)=0$ — некоторое нелинейное функциональное уравнение; $P(x)$ — нелинейная операция, переводящая элементы полного нормированного пространства X в элементы нормированного пространства Y и пусть x_1 — начальное приближение к корню рассматриваемого уравнения. Относительно $P(x)$ предположим, что она $q-1$ раз $(q\geqslant 3)$ непрерывно дифференцируема по Фреше в некоторой области D, границы которой будут указаны ниже, и что

$$\| P''(x) \| \leqslant M$$

$$x, \bar{x} \in D, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

$$\| P^{(q-1)}(x) - P^{(q-1)}(\bar{x}) \| \leqslant L \| x - \bar{x} \|^{\alpha}$$

Далее предположим, что линейный оператор $P'(x_1)$ имеет обратный $\Gamma(x_1) = [P'(x_1)]^{-1}$ и пусть

$$\| \Gamma(x_1) \| \leqslant B_1, \qquad \| P(x_1) \| \leqslant \delta_1.$$

Имея B_1, δ_1 и некоторые числа $\gamma > 1$, $f > 0$, $\omega > 0$ строим числовые последовательности $\{B_i\}$, $\{\delta_i\}$, $\{\eta_i\}$, $\{h_i\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ по формулам

$$B_{i+1} = \frac{B_i}{1-h_i}$$

$$\delta_{i+1} = (1-h_i)^2 (\omega h_i)^{\gamma-1} \delta_i$$

$$\eta_i = f B_i \delta_i$$

$$h_i = M B_i \eta_i.$$

Если

$$R = \left[1 + (\omega h_1)^{\gamma-1} (1-h_1) \Omega_\gamma \left((\omega h_1)^\gamma, \frac{1}{\omega} \right) \right] \eta_1$$

где

$$\Omega_\gamma(x, y) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[x^{\gamma^{j}-1} \prod_{j=0}^{j-1} (1 - x^{\gamma^{i}} y) \right]$$

(указанные ниже условия обеспечат сходимость этого ряда), то область D определяется неравенством

$$\| x - x_1 \| \leqslant R.$$

Итерационную формулу для построения итерационной последовательности x_1, x_2,... берем в виде

$$x_{n+1} = x_n + F_n \Gamma(x_n) P(x_n), \tag{1}$$

где

$$\Gamma(x_n) = [P'(x_n)]^{-1}, \quad F_n = F(x_n, P(x_n), P'(x_n), \ldots, P^{(q-1)}(x_n)).$$

Достаточным условием существования последовательности $\{x_i\}$ и ее сходимости к корню уравнения служит наличие таких γ, f, ω при которых

$$h_1 < 1, \quad \delta_2 \leqslant \delta_1 (1-h_1)^2 \tag{2}$$

а также

$$\| F_n \| \leqslant f, \quad \| P(x_n) \| \leqslant \delta_n \tag{3}$$

(для тех x_n, которые могут быть получены по формуле (1)) (см. [1]).

При исследовании конкретных итерационных процессов следует числа γ, f, ω выбирать так, чтобы удовлетворялись неравенства (3), неравенства (2) тогда будут служить условиями сходимости исследуемого процесса. В настоящей заметке указываются достаточные условия сходимости так называемых процессов Чебышева-Шредера (см. [2]). Соответствующая итерационная формула имеет вид

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^{q-1} \mu_i(x_n) P^i(x_n),$$

где μ_i — коэффициенты Чебышева-Шредера, определяемые формулами

$$\mu_i(x) = \mu_i(x, P'(x), \ldots, P^{(i)}(x))$$

$$\mu_1 P = -\Gamma(x) P(x)$$

$$\mu_k P^k = -\frac{1}{k} \frac{d\mu_{k-1}}{dx} \Gamma(x) P^k(x) \quad (k = 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

Из этих формул, а также из формулы

$$\frac{d\Gamma(x)}{dx} = -\Gamma(x) P''(x) \Gamma(x) \tag{5}$$

вытекает, что каждое слагаемое вида $\mu_i P^i$ состоит из суммы нескольких «простых произведений». Под «простым произведением» мы понимаем «произведение» нескольких одночленов, взятое с коэффициентом $\pm 1/i!$, составляющими одночленами могут быть $P(x_n)\,\Gamma(x_n)$, $P^{(j)}(x_n)$, $(j \geqslant 2)$, одночлены последнего типа кратко будем называть «производными». Отметим некоторые свойства «простых произведений». Каждое «простое произведение» слагаемого $\mu_i P^i$ содержит $P(x)$ только i раз. Число «производных» может колебаться от 1 до $i-1$ включительно. Число одночленов Γ в каждом «простом произведении» равно числу других одночленов этого «простого произведения»; одночлены $P(x)$ и «производные» входят лишь в комбинациях ΓP и $\Gamma P^{(i)}$.

Пусть число «простых произведений» слагаемого $\mu_i P^i$, содержащих ровно m «производных» не превышает числа $\xi_{i,m}$. Можно показать, что

$$\xi_{i,\,m} = m\,\xi_{i-1,\,m} + (i+m-2)\,\xi_{i-1,\,m-1}\quad i > 2 \tag{6}$$

В самом деле «простое произведение» слагаемого $\mu_i P^i$, содержащее m «производных», согласно (4) и (5) может быть получено либо в результате дифференцирования «производной» «простого произведения» слагаемого $\mu_{i-1} P^{i-1}$, содержащего m «производных», либо в результате дифференцирования $\Gamma(x)$ в «простом произведении» слагаемого $\mu_{i-1} P^{i-1}$, содержащего $m-1$ «производных», что и приводит к (6). Формулу (6) следует дополнить следующими равенствами

$$\xi_{21} = 0,\quad \xi_{i,\,m} = 0,\quad 1 < m < i.$$

Пусть

$$\sup \| P^{(i)}(x) \| \leqslant M_i < M \quad i = 2, 3, \ldots, q-1$$

Очевидно, можно положить

$$f = 1 + \sum_{i=2}^{q-1} \sum_{m=1}^{i-1} \frac{1}{i!}\,\xi_{i,\,m}\, M^m B_1^{i+m-1}\,\delta^{i-1}.$$

Значение f, полученное по этой формуле, как правило, завышенное; более точное значение, содержащее M_i, весьма громоздко. В каждом конкретном случае, имея итерационную формулу, т. е. зная коэффициенты μ_i, получение f не представляет труда. Так как рассматриваемая итерационная формула является формулой порядка q, то (см. [2])

$$\| P(x_{n+1}) \| \leqslant M \sum_{j=2}^{q-1}{}^{*} \frac{B_n^j \delta_n^j}{j!} \left[1 + \sum_{i=2}^{q-1} \sum_{m=1}^{i-1} \frac{1}{i!}\,\xi_{i,\,m} M^i B_n^{m+i-1} \delta_n^{m-1} \right]^j +$$

$$+ \frac{L}{(1+\alpha)\ldots(q-1+\alpha)}\,\eta_n^{q-1+\alpha}.$$

Откуда нетрудно получить

$$\gamma = q - 1 + \alpha$$

$$(1 + h_1)^2 (f M B_1^2)^{q-1+\alpha} \delta_1^{q-1+\alpha} \omega^{q-2+\alpha} =$$

$$= \frac{L}{(1+\alpha)\dots(q-1+\alpha)} (f B_1 \delta_1)^{q-1+\alpha} +$$

$$+ M \sum_{j=2}^{q-1}{}^{*} \frac{B_i^j \delta_i^j}{j!} \left[1 + \sum_{i=2}^{q-1} \sum_{m=1}^{i-1} \frac{1}{i!} \xi_{i,m} M^i B_1^{m+i-1} \delta_1^{m-1} \right]^i$$

Таким образом величины f, γ, ω нами определены.

ЛИТЕРАТУРА:

1. В. М. Чернышенко, О сходимости итерационных методов решения нелинейных уравнений, Сб. Гидроаэромеханика, вып. 4, издательство Харьковского Госуниверситета, 1966, стр. 70—74.

2. В. М. Чернышенко, Одноточечные итерационные формулы для решения функциональных уравнений, Сборник работ межвузовской тематической конференции, г. Днепропетровск, 1966, издательство Харьковского Госуниверситета, стр. 15—19.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Д. П. ЧЕРНЫШЕНКО.

Совокупность непрерывных в $(-a, a)$ функций $u(x)$, удовлетворяющих условию

$$| u(x) | \leqslant \frac{L}{(a+x)^\alpha (a-x)^\beta} \quad (0 < \alpha < 1;\ 0 < \beta < 1),$$

где L — некоторая константа, вообще говоря, зависящая от функции u, образует линейное множество. Если ввести норму по формуле

$$\| u(x) \| = \sup_{x \in (-a,a)} \{ | u(x) | (a+x)^\alpha (a-x)^\beta \},$$