Откуда нетрудно получить

$$\gamma = q - 1 + \alpha$$

$$(1 + h_1)^2 (f M B_1^2)^{q-1+\alpha} \delta_1^{q-1+\alpha} \omega^{q-2+\alpha} =$$

$$= \frac{L}{(1+\alpha)\dots(q-1+\alpha)} (f B_1 \delta_1)^{q-1+\alpha} +$$

$$+ M \sum_{j=2}^{q-1}{}^{*} \frac{B_i^j \delta_i^j}{j!} \left[1 + \sum_{i=2}^{q-1} \sum_{m=1}^{i-1} \frac{1}{i!} \xi_{i,m} M^i B_1^{m+i-1} \delta_1^{m-1} \right]^i$$

Таким образом величины f, γ, ω нами определены.

ЛИТЕРАТУРА:

1. В. М. Чернышенко, О сходимости итерационных методов решения нелинейных уравнений, Сб. Гидроаэромеханика, вып. 4, издательство Харьковского Госуниверситета, 1966, стр. 70—74.

2. В. М. Чернышенко, Одноточечные итерационные формулы для решения функциональных уравнений, Сборник работ межвузовской тематической конференции, г. Днепропетровск, 1966, издательство Харьковского Госуниверситета, стр. 15—19.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Д. П. ЧЕРНЫШЕНКО.

Совокупность непрерывных в $(-a, a)$ функций $u(x)$, удовлетворяющих условию

$$| u(x) | \leqslant \frac{L}{(a+x)^\alpha (a-x)^\beta} \quad (0 < \alpha < 1;\ 0 < \beta < 1),$$

где L — некоторая константа, вообще говоря, зависящая от функции u, образует линейное множество. Если ввести норму по формуле

$$\| u(x) \| = \sup_{x \in (-a,a)} \{ | u(x) | (a+x)^\alpha (a-x)^\beta \},$$

то рассматриваемое множество станет нормированным пространством, котрое мы будем обозначать символом $C_{\alpha\beta}$. В настоящей работе изучаются свойства некоторых операторов, действующих в пространстве $C_{\alpha\beta}$.

Теорема 1. Пусть при каждом фиксированном $x \in (-a, a)$ функция $f(x, s)$ принадлежит $C_{\alpha\beta}$, причем

$$\| f(x,s) \| \leqslant A(x) \leqslant A.$$

Тогда функция

$$w(x) = \int_{-a}^{a} f(x, s) \ln \left| \frac{s-x}{s-\mu} \right| ds \quad (-a < \mu < a)$$

принадлежит $C_{\alpha\beta}$ и

$$\| w(x) \| \leqslant AL,$$

где

$$L = \max \{ \Omega(\alpha, \beta, \mu); \quad \Omega(\beta, \alpha, \mu) \},$$

$$\Omega(\alpha, \beta, \mu) = 2^{\alpha} (a+\mu) \left[\frac{1}{1-\alpha} + \ln \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right] +$$

$$+ (4a)^{\beta} (a+\mu) \ln 2 \left[\frac{1}{(3a-\mu)^{\beta}} + \frac{1}{2^{\alpha}(a-\mu)^{\beta}} \right] +$$

$$+ (4a)^{\beta} \left[\frac{\frac{3a+\mu}{2} \ln \frac{3a+\mu}{2} - (a+\mu) \ln (a+\mu) - \frac{a-\mu}{2} \ln \frac{a-\mu}{2}}{(a-\mu)^{\beta}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(a+\mu)^{\alpha} (a-\mu)^{1-\beta} \ln \frac{3a+\mu}{a-\mu}}{2^{1-\alpha}(1-\beta)(3a+\mu)^{\alpha}} \right].$$

Доказательство. Пусть $-a < x < \mu$, тогда

$$| w(x) |) \leqslant A \int_{-a}^{a} \left| \ln \left| \frac{s-x}{s-\mu} \right| \right| \frac{ds}{(a+s)^{\alpha} (a-s)^{\beta}} =$$

$$= A \left[\int_{-a}^{\frac{x-a}{2}} \ln \frac{\mu-s}{x-s} \frac{ds}{(a+s)^{\alpha}(a-s)^{\beta}} + \int_{\frac{x-a}{2}}^{x} \ln \frac{\mu-s}{x-s} \times \right.$$

$$\times \frac{ds}{(a+s)^\alpha (a-s)^\beta} + \int\limits_{x}^{\frac{x+\mu}{2}} \ln \frac{\mu-s}{s-x} \frac{ds}{(a+s)^\alpha (a-s)^\beta} +$$

$$+ \int\limits_{\frac{x+\mu}{2}}^{\mu} \ln \frac{s-x}{\mu-s} \frac{ds}{(a+s)^\alpha (a-s)^\beta} + \int\limits_{\mu}^{\frac{a+\mu}{2}} \ln \frac{s-x}{s-\mu} \times$$

$$\times \frac{ds}{(a+s)^\alpha (a-s)^\beta} + \int\limits_{\frac{a+\mu}{2}}^{a} \ln \frac{s-x}{s-\mu} \frac{ds}{(a+s)^\alpha (a-s)^\beta} \Bigg].$$

Оценим каждый интеграл в отдельности

$$\int\limits_{-a}^{\frac{x-a}{2}} \ln \frac{\mu-s}{x-s} \frac{ds}{(a+s)^\alpha (a-s)^\beta} \leqslant \frac{2^\alpha (\mu+a)}{1-\alpha} \frac{1}{(a+x)^\alpha (a-x)^\beta};$$

$$\int\limits_{\frac{x-a}{2}}^{x} \ln \frac{\mu-s}{x-s} \frac{ds}{(a+s)^\alpha (a-s)^\beta} \leqslant 2^\alpha (\mu+a) \ln \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times$$

$$\times \frac{1}{(a+x)^\alpha (a-x)^\beta}$$

$$\int\limits_{x}^{\frac{x+\mu}{2}} \ln \frac{\mu-s}{s-x} \frac{ds}{(a+s)^\alpha (a-s)^\beta} \leqslant \frac{(4a)^\beta (\mu+a) \ln 2}{(3a-\mu)^\beta} \times$$

$$\times \frac{1}{(a+x)^\alpha (a-x)^\beta};$$

$$\int\limits_{\frac{x+\mu}{2}}^{\mu} \ln \frac{s-x}{\mu-s} \frac{ds}{(a+s)^\alpha (a-s)^\beta} \leqslant \frac{(2a)^\beta (\mu+a) \ln 2}{(a-\mu)^\beta} \times$$

$$\times \frac{1}{(a+x)^\alpha (a-x)^\beta}$$

$$\int_{\mu}^{\frac{a+\mu}{2}} \ln \frac{s-x}{s-\mu} \frac{ds}{(a+s)^{\alpha}(a-s)^{\beta}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(4a)^{\beta}\left[\frac{3a+\mu}{2}\ln\frac{3a+\mu}{2}+(\mu+a)\ln(\mu+a)-\frac{a-\mu}{2}\ln\frac{a-\mu}{2}\right]}{(a-\mu)^{\beta}} \times$$

$$\times \frac{1}{(a+x)^{\alpha}(a-x)^{\beta}};$$

$$\int_{\frac{a+\mu}{2}}^{a} \ln \frac{s-x}{s-\mu} \frac{ds}{(a+s)^{\alpha}(a-s)^{\beta}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(4a)^{\beta}(a+\mu)^{\alpha}(a-\mu)^{1-\beta}\ln\frac{3a+\mu}{a-\mu}}{2^{1-\alpha}(1-\beta)(3a+\mu)^{\alpha}} \frac{1}{(a+x)^{\alpha}(a-x)^{\beta}}.$$

В силу этих оценок имеем

$$|w(x)| \leqslant \frac{A\,\Omega(\alpha, \beta, \mu)}{(a+x)^{\alpha}(a-x)^{\beta}} \quad (-a < x < \mu).$$

Аналогично получаем

$$|w(x)| \leqslant \frac{A\,\Omega(\beta, \alpha-\mu)}{(a+x)^{\alpha}(a-x)^{\beta}} \quad (\mu < x < a).$$

Учитывая последние неравенства, и то, что $w(\mu)=0$, имеем

$$|w(x)| \leqslant \frac{A\,L}{(a+x)^{\alpha}(a-x)^{\beta}} \quad (-a < x < a)$$

Можно доказать также, что функция $w(x)$ непрерывна в $(-a, a)$. Этим теорема полностью доказана.

Из теоремы 1 вытекает важное следствие.

Следствие Пусть для $x, s \in (-a, a)$ выполняется условие

$$|R(x, s)| \leqslant M.$$

Если

$$h_1(s),\ h_2(s) \in C_{\alpha\beta};\quad \| h_1(s)-h_2(s) \| \leqslant \rho \quad \text{и}$$

$$wh = \int_{-a}^{a} |R(x, s)|\,|h(s)| \left| \ln \left| \frac{s-x}{s-\mu} \right| \right| ds,$$

то

$$\| wh_1 - wh_2 \| \leqslant N\rho,$$

где N не зависит от ρ.

Теорема 2. Пусть при фиксированных $x \in (-a, a)$ и $u(s) \in C_{\alpha\beta}$ функция $K(x, s, u(s))$ принадлежит $C_{\alpha\beta}$ и

$$\| K(x, s, u(s)) \| \leqslant F \| u \| + G.$$

Тогда оператор

$$A(u) = \int_{-a}^{a} K(x, s, u(s)) \ln \left| \frac{s-x}{s-\mu} \right| ds$$

отображает $C_{\alpha\beta}$ в себя.

Эта теорема является следствием теоремы 1.

Теорема 3. Пусть функция $F(x, s, u)$ непрерывна по всем аргументам и для $x, s, \in (-a, a), u \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяет условиям

$$| F(x, s, u_1) - F(x, s, u_1) | \leqslant R(x, s) | u_1 - u_2 | (a+s)^{\alpha} (a-s)^{\beta},$$

$$| F(x, s, 0) | \leqslant R_1(x, s),$$

где

$$0 \leqslant R(x, s) \leqslant R; \quad 0 \leqslant R_1(x, s) \leqslant R_1.$$

Тогда оператор

$$v(u, h) = \int_{-a}^{a} F(x, s, u(s))\, h(s) \ln \left| \frac{s-x}{s-\mu} \right| ds$$

всякую пару элементов $u(x)$, $h(x)$ пространства $C_{\alpha\beta}$ отображает в элемент того же пространства и линеен по второму аргументу.

Доказательство. Если $\| u(x) \| \leqslant K$; $\| h(x) \| \leqslant N$, то

$$| F(x, s, u(s))\, h(s) | \leqslant \{ | F(x, s, u(s)) - F(x, s, 0) | +$$

$$+ | F(x, s, 0) | \} | h(s) | \leqslant \frac{(RK + R_1) N}{(a+s)^{\alpha} (a-s)^{\beta}},$$

т. е. функция $F(x, s, u(s))\, h(s)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Первое утверждение теоремы 3 доказано.

Оператор $v(u, h)$, очевидно, относительно h аддитивен и однороден. Для установления линейности этого оператора достаточно показать его непрерывность при $h=0$. Имеем

$$| v(u, h)-v(u, 0) | \leqslant \int_{-a}^{a} | F(x, s, u(s))-F(x, s, 0) | \, | h(s) | \times$$

$$\times \ln \left| \frac{s-x}{s-\mu} \right| ds + \int_{-a}^{a} |F(x, s, 0)| \, |h(s)| \left| \ln \left| \frac{s-x}{s-\mu} \right| \right| ds \leqslant$$

$$\leqslant K \int_{-a}^{a} R(x, s) \, | h(s) | \left| \ln \left| \frac{s-x}{s-\mu} \right| \right| ds +$$

$$+ \int_{+a}^{a} R_1(x, s) \, | h(s) | \left| \ln \left| \frac{s-x}{s-\mu} \right| \right| ds.$$

Из этого неравенства и следствия теоремы 1 вытекает

$$\| v(u, h)-v(u, 0) \| \to 0 \text{ при } \| h \| \to 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4. Если при $x, s \in (-a, a)$, $u \in (-\infty, \infty)$ выполнено условие

$$| F(x, s, u_1)-F(x, s, u_2) | \leqslant R(x, s) \, | u_1-u_2 | \, (a+s)^\alpha \, (a-s)^\beta ,$$

где
$$0 \leqslant R(x, s) \leqslant R,$$

то
$$\lim_{\| h \| \to 0} \frac{\| \omega (u, h) \|}{\| h \|} = 0; \quad u(x), h(x) \in C_{\alpha\beta},$$

где

$$\omega (u, h) = \int_{-a}^{a} [F(x, s, u(s) + \Theta h(s)) -$$

$$- F(x, s, u(s))] \, h(s) \ln \left| \frac{s-x}{s-\mu} \right| ds \quad (0 < \Theta < 1).$$

Доказательство. В силу условия теоремы имеем

$$| \omega (u, h) | \leqslant \| h \| \int_{-a}^{a} R(x, s) \, | h(s) | \left| \ln \left| \frac{s-h}{s-\mu} \right| \right| ds = \| h \| \, Wh.$$

Отсюда
$$\frac{\| \omega(u.\, h) \|}{\| h \|} \leqslant \| Wh \| .$$

Справедливость данной теоремы вытекает теперь из следствия теоремы 1.

Теорема 5. Пусть функция $K(x, s, u)$ непрерывна по всем аргументам и для $x,\ s \in (-a,\ a),\ u \in (-\infty,\ \infty)$ выполняются условия

$$|K(x, s, u_1) - K(x, s, u_2)| \leqslant R_0(x, s)\, |u_1 - u_2|;$$
$$|K(x, s, 0)| \leqslant \overline{R}^0(x, s)\, (a+s)^{-\alpha} (a-s)^{-\beta};$$
$$|K_u'(x, s, u_1) - K_u'(x, s, u_2)| \leqslant R_1(x, s)\, |u_1 - u_2|\, (a+s)^{\alpha} (a-s)^{\beta};$$
$$|K_u'(x, s, 0)| \leqslant \overline{R}_1(x, s),$$

где
$$0 \leqslant R_i(x, s) \leqslant R_i; \quad 0 \leqslant \overline{R}_i(x, s) \leqslant \overline{R}_i \quad (i = 0, 1).$$

Тогда оператор
$$A(u) = \int_{-a}^{a} K(x, s, u(s)) \ln \left| \frac{s-x}{s-\mu} \right| ds$$

дифференцируем в смысле Фреше в пространстве $C_{\alpha\beta}$. Дифференциал Фреше имеет вид
$$A'(u)\, h = \int_{-a}^{a} K_u'(x, s, u(s))\ h(s) \ln \left| \frac{s-x}{s-\mu} \right| ds.$$

Доказательство. Зафиксируем $u(x) \in C_{\alpha\beta}$ и составим приращение
$$A(u+h) - A(u) = \int_{-a}^{a} [K(x, s, u(s) + h(s)) - K(x, s, u(s))] \times$$
$$\times \ln \left| \frac{s-x}{s-\mu} \right| ds = \int_{-a}^{a} [K_u'(x, s, u(s) + \Theta\, h(s)) - K_u'(x, s, u(s))]\, h(s) \times$$
$$\times \ln \left| \frac{s-x}{s-\mu} \right| ds + \int_{-a}^{a} K_u'(x, s, u(s))\, h(s) \ln \left| \frac{s-x}{s-\mu} \right| ds =$$
$$= \omega(u, h) + v(u, h).$$

В силу теорем 2, 3, 4 при условиях данной теоремы операторы $A(u)$, $v(u, h)$ и $\omega(u, h)$ действуют в $C_{\alpha\beta}$, оператор $v(u, h)$ линеен по h, а для $\omega(u, h)$ справедливо равенство

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega(u, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Этим теорема доказана.

Обобщая теорему 5, можно получить достаточные условия существования производных Фреше любых порядков.

О ТОЧНОЙ ВЕРХНЕЙ ГРАНИ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

И. В. ЩЕРБАКОВ.

1. Известно, что коэффициенты тригонометрических интерполяционных полиномов выражаются формулами:

$$a_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{\nu=1}^{2n+1} f(x_\nu) \cos k x_\nu, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \qquad (1)$$

$$b_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{\nu=1}^{2n+1} f(x_\nu) \sin k x_\nu, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

где

$$x_\nu = \frac{2\nu\pi}{2n+1}. \qquad (3)$$

Цель настоящей работы: найти экстремальные функции, реализующие точные верхние грани коэффициентов a_k и b_k, а также подсчитать точные верхние грани этих коэффициентов для периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица; распространить этот результат на случай, когда интервал периодичности функции $f(x)$ разбит на число частей, равное $m(2n+1)$, и на интерполяционный случай функций двух переменных.