В силу теорем 2, 3, 4 при условиях данной теоремы операторы $A(u)$, $v(u, h)$ и $\omega(u, h)$ действуют в $C_{\alpha\beta}$, оператор $v(u, h)$ линеен по h, а для $\omega(u, h)$ справедливо равенство

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega(u, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Этим теорема доказана.

Обобщая теорему 5, можно получить достаточные условия существования производных Фреше любых порядков.

О ТОЧНОЙ ВЕРХНЕЙ ГРАНИ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

И. В. ЩЕРБАКОВ.

1. Известно, что коэффициенты тригонометрических интерполяционных полиномов выражаются формулами:

$$a_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{\nu=1}^{2n+1} f(x_\nu) \cos k x_\nu, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

$$b_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{\nu=1}^{2n+1} f(x_\nu) \sin k x_\nu, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где

$$x_\nu = \frac{2\nu\pi}{2n+1}. \tag{3}$$

Цель настоящей работы: найти экстремальные функции, реализующие точные верхние грани коэффициентов a_k и b_k, а также подсчитать точные верхние грани этих коэффициентов для периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица; распространить этот результат на случай, когда интервал периодичности функции $f(x)$ разбит на число частей, равное $m(2n+1)$, и на интерполяционный случай функций двух переменных.

Теорема 1. Пусть 2π — периодическая функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant K|x_2-x_1|^{\alpha}, \quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1,$$

тогда точная верхняя грань коэффициентов $a_к$, $b_к$, тригонометрических интерполяционных полиномов, построенных для этих функций будет равна

$$\sup_{f\in H^{(\alpha)}} b_к = \sup_{f\in H^{(\alpha)}} a_к = \frac{4K}{\pi k^{\alpha}}\int_0^{\pi/2} t^{\alpha}\sin t\,dt + O\left(\frac{1}{n k^{\alpha}}\right)\cdot$$

Доказательство. Вначале найдем экстремальную функцию для коэффициентов b_1. Покажем, что значение экстремальной функции в точке $x_0=0$ можно принять равным нулю. Для этого выражение (2) при $k=1$ преобразуем следующим образом

$$b_1=\frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{2n+1}[f(x_\nu)\sin x_\nu - f(0)\sin x_\nu]+$$
$$+\frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{2n+1} f(0)\sin x_\nu\,. \tag{4}$$

Так как $f(o)$ не зависит от индекса суммирования, то, вынося его в последней сумме за знак суммирования и, учитывая, что сумма синусов берется по равноотстоящим узлам от 0 до 2π следует, что эта сумма равна нулю. Поэтому равенство (4) принимает вид.

$$b_1=\frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{2n+1}[f(x_\nu)-f(0)]\sin x_\nu\,. \tag{5}$$

Сравнивая (5) и (2) мы видим, что без ограничения общности можно считать $f(o)=0$.

Далее, убедимся в том, что искомая экстремальная функция должна быть нечетной функцией. Для этого правую часть равенства (2) разобъем на две части

$$b_1=\frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{2n+1}{2}\right]}\sin x_\nu f(x_\nu)+\sum_{\nu=\left[\frac{2n+1}{2}\right]+1}^{2n+1}\sin x_\nu f(x_\nu). \tag{6}$$

Выражение $\left[\frac{2n+1}{2}\right]$ здесь и в дальнейшем означает целую часть дроби, в данном случае $\frac{2n+1}{2}$. Так как последнее слагаемое второй суммы соотношения (6) равно нулю, а также в силу нечетности функции синуса, равенство (6) перепишем в виде

$$b_1 = \frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\sin x_\nu - \frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=i}^{n} f(2\pi - x_\nu)\sin x_\nu .$$

Или, учитывая периодичность функции $f(t)$, период 2π можно опустить и, тогда, последнее равенство принимает вид

$$b_1 = \frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu) - f(-x_\nu)]\sin x_\nu . \qquad (7)$$

Чтобы соотношение (7) давало $\max b_1$ должно выполняться $f(-x_\nu) = -f(x_\nu)$, что убеждает нас в том, что искомая экстремальная функция должна быть нечетной.

Ввиду того, что искомая экстремальная функция должна удовлетворять условию Липшица, а также в точке $x_0=0$ она должна быть равна нулю, то на участке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ее выражение будет иметь вид $f(t) = Kt^\alpha$. В силу периодичности функции $f(t)$, в точке $x_{2n+1} = 2\pi$ она также будет равна нулю. Но так как она является нечетной функцией, то на отрезке $\left[\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right]$ ее выражение будет иметь вид $f(t) = -K(2\pi - t)^\alpha$. На участке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ — $f(t) = K|\pi - t|^\alpha$, а на участке $\left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$ $f(t) = -K\left(t-\pi\right)^\alpha$. Таким образом, для b_1 экстремальная функция найдена.

Распространяя аналогичные рассуждения для произвольного k, мы приходим к тому, что экстремальная функция для $b_к$ $(k > 1)$ обладает теми же свойствами, что и при $k=1$, и в силу тех же рассуждений приходим к тому, что она будет иметь следующий вид:

$$f(t)=Kt^{\alpha} \qquad \text{на участке} \qquad \left[0;\ \frac{\pi}{2k}\right],$$

$$f(t)=\left(\frac{\pi}{k}-t\right)^{\alpha}K \qquad \left[\frac{\pi}{2k};\ 2\frac{\pi}{2k}\right],$$

. . . .

$$f(t)=-(2\pi-t)^{\alpha}K \qquad \left[2\pi-\frac{\pi}{2k};\ 2\pi\right].$$

Чтобы найти экстремаль для коэффициентов $a_к$, мы воспользуемся формулой дополнения $\cos t=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ т. е. в выражениях (8) следует вместо t ставить $\frac{\pi}{2}-t$.

Подсчет точной верхней грани коэффициентов мы, опять, начнем со случая $k=1$. Будем иметь

$$\sup_{f\in H^{(\alpha)}} b_1=\frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{2n+1} f(x_\nu)\sin x_\nu+\frac{2K}{2n+1}\left[\sum_{0\leqslant x_\nu\leqslant\frac{\pi}{2}}(x_\nu)^{\alpha}\sin x_\nu+\right.$$

$$\left.+\sum_{\frac{\pi}{2}\leqslant x_\nu\leqslant\pi}(\pi-x_\nu)^{\alpha}\sin x_\nu-\sum_{\pi\leqslant x_\nu\leqslant\frac{3}{2}\pi}\left(\frac{3}{2}\pi-x_\nu\right)^{\alpha}\sin x_\nu-\sum_{\frac{3}{2}\pi\leqslant x_\nu\leqslant 2\pi}(2\pi-x_\nu)^{\alpha}\sin x_\nu\right).$$

В силу нечетности экстремали и функции синуса, две вторые суммы соответственно равны двум первым суммам, взятым с противоположным знаком. Кроме того, в силу симметрии синусоиды и экстремали относительно прямой $x=\frac{\pi}{2}$ будем иметь

$$\sup_{f\in H^{(\alpha)}} b_1=\frac{4K}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\nu\pi}{2n+1}\right)^{\alpha}\sin\frac{\nu\pi}{2n+1}.$$

Или

$$\sup_{f\in H^{(\alpha)}} b_1=\frac{4K}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\nu\pi}{2n+1}\right)^{\alpha}\sin\frac{\nu\pi}{2n+1}\,\frac{\pi}{2n+1}.$$

Правая часть последнего соотношения представляет собой интегральную сумму интеграла $\int\limits_0^{\pi/2-h_1} t^\alpha \sin t\,dt$. Если сделать сдвиг суммирования на единицу вправо, то можно записать следующее соотношение

$$\frac{4K}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\frac{\nu\pi}{2n+1}\right)^\alpha \sin\frac{\nu\pi}{2n+1}\,\frac{\pi}{2n+1} < \frac{4K}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2-h_1} t^\alpha \sin t\,dt <$$

$$< \frac{4K}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\nu\pi}{2n+1}\right)^\alpha \sin\frac{\nu\pi}{2n+1}\,\frac{\pi}{2n+1}.$$

где
$$h_1 = \frac{\pi}{2(2n+1)}.$$

Но разность между суммами, стоящими слева и справа в последнем неравенстве составляет $\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)^\alpha \sin\frac{n\pi}{2n+1}\,\frac{4K}{2n+1}$, т. е. равно $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Поэтому можно записать

$$\sup_{f\in H^{(\alpha)}} b_1 = \frac{4K}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Чтобы подсчитать точную верхнюю грань коэффициентов $b_к$ при произвольном значении $k>1$, с помощью аналогичных рассуждений прийдем к тому, что надо вычислить следующую сумму

$$\sup_{f\in H^{(\alpha)}} b_к = \frac{4K}{k^\alpha(2n+1)}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\nu\pi}{(2n+1)}\right)^\alpha \sin\frac{\nu\pi}{2n+1}$$

или

$$\sup_{f\in H^{(\alpha)}} b_к = \frac{4K}{\pi k^\alpha}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\nu\pi}{2n+1}\right)^\alpha \sin\frac{\nu\pi}{2n+1}\,\frac{\pi}{2n+1}.$$

Правая часть последнего соотношения представляет также интегральную сумму интеграла $\int\limits_0^{\pi/2-h_к} t^\alpha \sin t\,dt$. Сделав сдвиг суммирования на один шаг, можно записать следующее соотношение.

$$\frac{4K}{\pi k^\alpha}\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\frac{\nu\pi}{2n+1}\right)^\alpha \sin\frac{\nu\pi}{2n+1}\,\frac{\pi}{2n+1} < \frac{K}{\pi k^\alpha}\int\limits_0^{\pi/2-h_\text{к}} t^\alpha \sin t\, dt <$$

$$< \frac{4K}{\pi k^\alpha}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\nu\pi}{2n+1}\right)^\alpha \sin\frac{\nu\pi}{2n+1}\,\frac{\pi}{2n+1},$$

где
$$h_\text{к} = \frac{\pi}{2k(2n+1)}.$$

Разность между суммами, заключающими между собой интеграл в последнем неравенстве равна $\frac{4K}{k^\alpha(2n+1)}\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)^\alpha\times$ $\times\sin\frac{n\pi}{2n+1}$ т. е. равна $O\left(\frac{1}{nk^\alpha}\right)$.

Итак, имеем

$$\sup_{f\in H^{(\alpha)}} b_\text{к} = \frac{4K}{\pi k^\alpha}\int\limits_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\, dt + O\left(\frac{1}{nk^\alpha}\right). \tag{9}$$

Чтобы сказать о точной верхней грани коэффициентов $a_\text{к}$ обратим внимание на то, что (1) можно переписать в виде

$$a_\text{к} = \frac{2}{2n+1}\int\limits_{\nu=1}^{2n+1} f(x_\nu)\sin k\left(\frac{\pi}{2} - x_\nu\right). \tag{10}$$

Уравнения экстремальной функции для коэффициентов $a_\text{к}$ отличаются от уравнений экстремальной функции коэффициентов $b_\text{к}$ на соответствующих интервалах сдвигом на $\pi/2$. В силу периодичности функций, входящих под знак суммы, ее величина не изменится, если сдвинуть весь интервал суммирования на $\pi/2$. Поэтому значение точной верхней грани для коэффициентов $a_\text{к}$ не будет отличаться от значения точной верхней грани для коэффициентов $b_\text{к}$. Что и требовалось доказать.

2. Если промежуток $[0;\ 2\pi]$ разбить на число частей, равное $m(2n+1)$, то коэффициенты тригонометрических полиномов наилучшего средне-квадратичного приближения

в полученной системе равноотстоящих точек будут определяться по формулам

$$a_к^{(m)} = \frac{2}{m(2n+1)} \sum_{\nu=1}^{m(2n+1)} f(x_\nu^{(m)}) \cos k x_\nu^{(m)}, \quad k=0,1,2,\dots,n \tag{11}$$

$$b_к^{(m)} = \frac{2}{m(2n+1)} \sum_{\nu=1}^{m(2n+1)} f(x_\nu^{(m)}) \sin k x_\nu^{(m)}, \quad k=1,2,\dots,n, \tag{12}$$

где

$$x_\nu^{(m)} = x^\nu = \frac{2\nu\pi}{m(2n+1)} \quad \begin{array}{l} m=1,2,\dots \\ \nu=0,1,2,\,,\dots,m(2n+1) \end{array} \tag{13}$$

Теорема 2. Пусть 2π — периодическая функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, тогда точная верхняя грань коэффициентов $a_к^{(m)}$, $b^{(m)}$ тригонометрических полиномов наилучшего среднеквадратичного приближения в полученной системе равноотстоящих точек для этих функций будет равна

$$\sup_{f\in H^{(\alpha)}} b_к^{(m)} = \sup_{f\in H^{(\alpha)}} a_к^{(m)} = \frac{4K}{\pi k^\alpha} \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\, dt + O\left(\frac{1}{k^\alpha mn}\right)$$

Доказательство. Чтобы построить экстремальные функции для коэффициентов $a_к^{(m)}$, $b_к^{(m)}$, определенных формулами (11), (12) и вычислить точные верхние грани этих коэффициентов для периодической функции, удовлетворяющей условию Липшица, достаточно провести рассуждения, аналогичные тем, что приводились в доказательстве теоремы 1. Мы можем убедиться в том, что значения экстремальной функции для коэффициентов $b_к^{(m)}$ в точке $x_0=0$. и $x_{m(2n+1)}=2\pi$ можно считать равным нулю. Кроме того, $f(-x)=-f(x)$, т. е. экстремальная функция будет функцией нечетной. Экстремальная функция будет определяться теми же формулами (8), где, в отличие от предыдущего случая, значения $x_\nu^{(m)}$ опредляются по формулам (13). При вычислении точной верхней грани коэффициентов $b_к^{(m)}$ берется во внимание симметричность функций синуса и экстремали относительно прямой $x=\pi/2$ в силу чего выражение (12) преобразуется к виду

$$\sup_{f\in H^{(\alpha)}} b_{\text{к}}^{(m)} = \frac{4K}{m(2n+1)} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m(2n+1)}{2}\right]} \left[\frac{\nu\pi}{km(2n+1)}\right]^{\alpha} \sin\frac{\pi\nu}{m(2n+1)}.$$

Или

$$\sup_{f\in H^{(\alpha)}} b_{\text{к}}^{(m)} = \frac{4K}{k^{\alpha}\pi} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m(2n+1)}{2}\right]} \left[\frac{\nu\pi}{m(2n+1)}\right]^{\alpha} \times$$

$$\times \sin\frac{\nu\pi}{m(2n+1)} \frac{\pi}{m(2n+1)}.$$

В силу того, что правая часть последнего равенства представляет интегральную сумму интеграла $\int\limits_0^{\pi/2-h_{\text{к}}^{(m)}} t^{\alpha}\sin t\,dt$, можно написать следующее соотношение:

$$\frac{4K}{\pi k^{\alpha}} \int\limits_{\nu=1}^{\left[\frac{m(2n+1)}{2}\right]-1} \left[\frac{\nu\pi}{m(2n+1)}\right]^{\alpha} \sin\frac{\nu\pi}{m(2n+1)} \frac{\pi}{m(2n+1)} <$$

$$< \frac{4K}{\pi k^{\alpha}} \int\limits_0^{\pi/2-h_{\text{k}}^{m}} t^{\alpha}\sin t\,dt < \frac{4K}{\pi k^{\alpha}} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m(2n+1)}{2}\right]} \left[\frac{\nu\pi}{m(2n+1)}\right]^{\alpha} \times$$

$$\times \sin\frac{\nu\pi}{m(2n+1)} \frac{\pi}{m(2n+1)},$$

где

$$h_{\text{k}}^{(m)} = \frac{\pi}{2km(2n+1)}.$$

Разность между суммами, заключающими интеграл, в последнем неравенстве равна

$$\frac{4K}{k^{\alpha} m(2n+1)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha},$$

т. е. равна

$$O\left(\frac{1}{mnk^{\alpha}}\right).$$

Итак, имеем

$$\sup_{f\in H^{(\alpha)}} b_{к} = \frac{4K}{\pi k^{\alpha}} \int_{0}^{\pi/2} t^{\alpha} \sin t \, dt + O\left(\frac{1}{mnk^{\alpha}}\right). \tag{14}$$

Об экстремальной функции для коэффициентов $a_{к}^{(m)}$, определенных формулами (11), следует сказать то же, что и об экстремальных функциях для коэффициентов $a_{к}$, определенных формулами (1). Значение же точной верхней грани $a_{к}^{(m)}$ будет равно точной верхней грани $b_{к}^{(m)}$ т. е. определяться соотношением (14). Утверждение теоремы доказано.

3. Пусть $f(x, y)$ 2π — периодическая функция по обеим переменным удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x_1; y_1) - f x_2; y_2)| \leqslant M\,|x_2 - x_1|^{\alpha} + N\,|y_2 - y_1|^{\beta}.$$

Коэффициенты тригонометрических интерполяционных полиномов определяются формулами:

$$a_{кl} = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{\mu=1}^{2m+1} \sum_{\nu=1}^{2n+1} f(x_{\mu}; y_{\nu}) \cos k\, x_{\mu} \cos l\, y_{\nu}, \tag{15}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, m,$$
$$l = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$b_{кl} = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{\nu=1}^{2m+1} \sum_{\nu=1}^{2n+1} f(x_{\mu}; y_{\nu}) \cos k\, x_{\mu} \sin l\, y_{\nu}, \tag{16}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, m,$$
$$l = 1, 2, \ldots, n,$$

$$c_{кl} = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{\mu=1}^{2m+1} \sum_{\nu=1}^{2n+1} f(x_{\mu}; y_{\nu}) \sin k\, x_{\mu} \cos l\, y_{\nu}, \tag{17}$$

$$k = 0, 1. 2, \ldots, m,$$
$$l = 1, 2, \ldots, n$$

$$d_{\kappa l}=\frac{4}{(2m+1)(2n+1)}\sum_{\mu=1}^{2m+1}\sum_{\nu=1}^{2n+1} f(x_\mu;\, y_\nu)\sin k\, x_\mu \sin l\, y_\nu, \quad (18)$$

$$k=1,\,2,\,\ldots,\,m,$$

где

$$l=1,\,2,\,\ldots,\,n,$$

$$x_\mu=\frac{2\,\mu\,\pi}{2m+1},\quad \mu=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,2m+1, \quad (19)$$

$$y_\nu=\frac{2\,\nu\,\pi}{2n+1},\quad \nu=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,2n+1. \quad (20)$$

Теорема 3. Пусть 2π —периодическая функция по обеим переменным удовлетворяет условию Липшица, тогда точная верхняя грань коэффициентов $a_{\kappa l}$, $b_{\kappa l}$, $c_{\kappa l}$, $d_{\kappa l}$ тригонометрических интерполяционных полиномов, построенных для этих функций будет равна

$$\sup_{f\in H^{(\alpha,\beta)}} d_{\kappa l}=\sup_{f\in H^{(\alpha,\beta)}} a_{\kappa l}=\sup_{f\in H^{(\alpha,\beta)}} b_{\kappa l}=\sup_{f\in H^{(\alpha,\beta)}} c_{\kappa l}=\frac{16\,M}{\pi^2 k^\alpha}\int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\, dt+$$

$$+\frac{16\,N}{\pi^2 l^\beta}\int_0^{\pi/2} t^\beta \sin t\, dt+O\left(\frac{1}{mk^\alpha}\right)+O\left(\frac{1}{n\,l^\beta}\right).$$

Доказательство. Чтобы определить точные верхние грани для коэффициентов $a_{\kappa l}$, $b_{\kappa l}$, $c_{\kappa l}$, $d_{\kappa l}$, как и в предыдущих случаях, построим экстремали, причем сначала для коэффициентов $d_{\kappa l}$. При этом покажем, что f**(о; о)**, а в силу периодичности и $f(2\pi;\, 2\pi)$ можно считать, без ограничения общности, равными нулю. Для этого, соотношения (5) преобразуем следующим образом:

$$d_{\kappa l}=\frac{4}{(2m+1)(2n+1)}\sum_{\mu=1}^{2m+1}\sum_{\nu=1}^{2n+1}\left[f(x_\mu;\, y_\nu)\sin k\, x_\mu \sin l\, y_\nu-\right.$$

$$\left.-f(0;\, 0)\sin k\, x_\mu \sin l\, y_\nu\right]+\frac{4}{(2m+1)(2n+1)}\sum_{\mu=1}^{2m+1}\sum_{\nu=1}^{2n+1}\times$$

$$\times f(0;\, 0)\sin k\, x_\mu \sin l\, y_\nu.$$

Или

$$d_{kl}=\frac{4}{(2m+1)(2n+1)}\sum_{\mu=1}^{2m+1}\sum_{\nu=1}^{2n+1}[f(x_\mu;y_\nu)-f(0;0)]\sin kx_\mu\times$$

$$\times\sin ly_\nu+\frac{4f(0,0)}{(2m+1)(2n+1)}\sum_{\mu=1}^{2m+1}\sin kx_\mu\sum_{\nu=1}^{2n+1}\sin ly_\nu,$$

Так как суммы синусов с равноотстоящими узлами на промежутке $[0;2\pi]$ равны нулю, то

$$d_{kl}=\frac{4}{(2m+1)(2n+1)}\sum_{\mu=1}^{2m+1}\sum_{\nu=1}^{2n+1}[f(x_\mu;y_\nu)-$$

$$-f0;0)]\sin kx_\mu\sin ly_\nu.$$

Сравнивая последнее равенство с равенством (18) заключаем, что можно считать $f(o;o)=0$. В силу периодичности функции $f(x,y)$ будем иметь также $f(2\pi;2\pi)=0$.

Изучим поведение экстремальной функции в квадрате $0\leqslant x_\mu\leqslant 2\pi$, $0\leqslant y_\nu\leqslant 2\pi$, для этого соотношение (18) представим в виде:

$$d_{kl}=\frac{4}{(2m+1)(2n+1)}\left[\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}f(x_\mu;y_\nu)\sin kx_\mu\sin ly_\nu+\right.$$

$$+\sum_{\mu=m+1}^{2m+1}\sum_{\nu=1}^{n}f(x_\mu;y_\nu)\sin kx_\mu\sin ly_\nu+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=n+1}^{2n+1}f(x_\mu;y_\nu)\sin kx_\mu\sin ly_\nu+$$

$$\left.+\sum_{\mu=m+1}^{2m+1}\sum_{\nu=n+1}^{2n+1}f(x_\mu;y_\nu)\sin kx_\mu\sin ly_\nu\right].$$

Если во второй паре сумм производить суммирование по μ в обратном направлении, от значения 2π к значению π, что равносильно замене x_μ на $2\pi-x_\mu$, в третьей паре сумм производить суммирование по ν в обратном направлении и в последней паре сумм производить суммирование по μ и ν в обратном направлении, то последнее равенство можно будет переписать следующим образом:

$$d_{kl} = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \left[\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\mu; y_\nu) \sin k x_\mu \sin l y_\nu - \right.$$

$$- \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} f(2\pi - x_\mu; y_\nu) \sin k x_\mu \sin l y_\nu -$$

$$- \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\mu; 2\pi - y_\nu) \sin k x_\mu \sin l y_\nu +$$

$$\left. + \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} f(2\pi - x_\mu; 2\pi - y_\nu) \sin k x_\mu \sin l y_\nu \right],$$

Или объединяя под одну пару сумм, получим

$$d_{kl} = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\mu; y_\nu) - f(2\pi - x_\mu; y_\nu) -$$

$$- f(x_\mu; 2\pi - y_\nu) + f(2\pi - x_\mu; 2\pi - y_\nu] \sin k x_\mu \sin l y_\nu.$$

Так как функция $f(x, y)$ периодична, то период 2π у аргументов последнего равенства можно опустить и мы будем иметь

$$d_{kl} = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\mu; y_\nu) - f(-x_\mu; y_\nu) -$$

$$- f(x_\mu; y_\nu) + f(-x_\mu; -y_\nu)] \sin k x_\mu \sin l y_\nu.$$

Чтобы d_{kl} могло принять наибольшее значение, требуется выполнение такого соотношения:

$$-f(-x_\mu; y_\nu) = -f(x_\mu; -y_\nu) = f(-x_\mu; -y_\nu) = f(x_\mu; y_\nu).$$

Тогда окончательно запишем

$$d_{kl} = \frac{16}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\mu; y_\nu) \sin k x_\mu \sin l y_\nu. \quad (21)$$

Это означает, что суммирование требуется выполнять только в квадрате $0 \leqslant x_\mu \leqslant \pi$; $0 \leqslant y_\nu \leqslant \pi$. Но, так как, синусоида симметрична относительно прямой $y = \pi/2$; $x = \pi/2$, то и экстремаль будет симметричной относительно плоскостей $x = \pi/2$ и $y = \pi/2$. Кроме того, эта функция должна удовлетворять условию Липшица, поэтому, аналогично случаю с функциями одной переменной, экстремаль для d_{kl} будет иметь вид:

$$f(x;y) = M x^\alpha + N y^\beta \text{ в квадрате } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2k};\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2l},$$

$$f(x;y) = M\left(\frac{\pi}{k} - x\right)^\alpha + y^\beta N \quad \text{в квадрате}$$

$$\frac{\pi}{2k} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{2k};\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2l},$$

$$f(x;y) = M\left(\frac{2\pi}{k} - x\right)^\alpha + y^\beta N \quad \text{в квадрате}$$

$$\frac{2\pi}{2k} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{2k};\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2l}, \tag{22}$$

. . . .

$$f(x;y) = M(2\pi - x)^\alpha + (2\pi - y)^\beta N \quad \text{в квадрате}$$

$$2\pi - \frac{\pi}{2k} \leqslant x \leqslant 2\pi;\quad 2\pi - \frac{\pi}{2l} \leqslant y \leqslant 2\pi.$$

Чтобы получить экстремальную функцию для коэффициентов a_{kl} достаточно в равенствах (22) вместо x ставить $\pi/2 - x$ и вместо y ставить $\pi/2 - y$. Для получения экстремальной функции для коэффициентов b_{kl} достаточно вместо x ставить $\pi/2 - x$, а для получения экстремальной функции для коэффициентов c_{kl} достаточно вместо y ставить $\pi/2 - y$ в те же равенства (22).

Подсчитаем точную верхнюю грань для коэффициентов d_{kl}. Рассмотрим, вначале, случай, когда $k=1$, $l=1$. Учитывая то, что экстремаль будет симметричной относительно плоскостей $x = \pi/2$, $y = \pi/2$ и синусоида симметрична относительно прямых $x = \pi/2$, $y = \pi/2$ выражение (21) перепишем в этом случае в виде

$$\sup_{f\in H^{(\alpha,\beta)}} d_{11} = \frac{16}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \left[M \left(\frac{\mu\pi}{2m+1} \right)^{\alpha} + \right.$$

$$\left. N \left(\frac{\nu\pi}{2n+1} \right)^{\beta} \right] \sin \frac{\mu\pi}{2m+1} \sin \frac{\nu\pi}{2n+1} = \left[\frac{4}{2n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \times \right.$$

$$\left. \times \sin \frac{\nu\pi}{2n+1} \right] \left[\frac{4M}{\pi} \sum_{\mu=1}^{m} \left(\frac{\mu\pi}{2m+1} \right)^{\alpha} \sin \frac{\mu\pi}{2m+1} \, \frac{\pi}{2m+1} \right] +$$

$$+ \left[\frac{4}{2m+1} \sum_{\mu=1}^{m} \sin \frac{\mu\pi}{2m+1} \right] \left[\frac{4N}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\nu\pi}{2n+1} \right)^{\beta} \sin \frac{\nu\pi}{2n+1} \, \frac{\pi}{2n+1} \right].$$

Вторые множители этих двух слагаемых нам известны, они равны $\sup\limits_{f\in H^{(\alpha)}} b_1$. Для вычисления первых множителей воспользуемся формулой

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2} \operatorname{cosec} \frac{x}{2}.$$

В искомой сумме тогда мы получим:

$$\frac{4}{2n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu \frac{\pi}{2n+1} = \frac{4}{2n+1} \sin \left[\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4(2n+1)} \right] \times$$

$$\times \sin \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4(2n+1)} \right] \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2n+1}.$$

При $n \to \infty$ это выражение стремится к $4/\pi$. Таким образом, получаем окончательно.

$$\sup_{f\in H^{(\alpha,\beta)}} d_{11} = \frac{16}{\pi^2} \left[M \int_0^{\pi/2} t^{\alpha} \sin t \, dt + N \int_0^{\pi/2} t^{\beta} \sin t \, dt + \right.$$

$$\left. + O\left(\frac{1}{m} \right) + O\left(\frac{1}{n} \right) \right]. \tag{23}$$

Рассмотрим теперь случай произвольного значения индексов k и l. В этом случае равенство (21) перепишем в таком виде:

$$\sup_{f \in H^{(\alpha, \beta)}} d_{\kappa l} = \frac{16}{(2m+1)(2n+1)} \left[\frac{M}{k^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} \sin \frac{\nu \pi}{2l+1} \sum_{\mu=1}^{m} \times \right.$$

$$\times \left(\frac{\mu \pi}{2m+1} \right)^\alpha \sin \frac{\mu \pi}{2m+1} + \frac{N}{l^\alpha} \sum_{\mu=1}^{m} \sin \frac{\mu \pi}{2m+1} \times$$

$$\left. \times \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\nu \pi}{2n+1} \right)^\beta \sin \frac{\nu \pi}{2n+1} \right] = \frac{16 M}{\pi^2 k^\alpha} \left[\int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t \, dt + \right.$$

$$\left. + O\left(\frac{1}{m} \right) \right] + \frac{16 N}{\pi^2 l^\beta} \left[\int_0^{\pi/2} t^\beta \sin t \, dt + O\left(\frac{1}{n} \right) \right].$$

Или

$$\sup_{f \in H^{(\alpha, \beta)}} d_{\kappa l} = \frac{16}{\pi^2} \left[\frac{M}{k^\alpha} \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t \, dt + \frac{N}{l^\beta} \int_0^{\pi/2} t'^\beta \sin t \, dt \right] +$$

$$+ O\left(\frac{1}{m k^\alpha} \right) + O\left(\frac{1}{n l^\beta} \right). \tag{24}$$

Точные верхние грани коэффициентов $a_{\kappa l}$, $b_{\kappa l}$, $c_{\kappa l}$ будут равны точной верхней грани коэффициентов $d_{\kappa l}$, так как их экстремальные функции отличаются от экстремальной функции коэффициентов $d_{\kappa l}$ лишь сдвигами на $\pi/2$, что не влияет, в общем случае, на величину коэффициентов.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Н. Я. ЯЦЕНКО.

1. Пусть $C_{2\pi}$ обозначает класс непрерывных 2π—периодических функций.

Зададим систему точек $x_\kappa = \dfrac{2k\pi}{N}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $N = m(2n+1)$, $m = 1, 2, \ldots$ Тогда полином наилучшего средне-квадратического приближения порядка n для функция $f(x)$ имеет вид