ISSN 9125 0912. *Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2013, вип.* **18**

УДК 517.5

Неравенства разных метрик типа Бернштейна для сплайнов, заданных на действительной оси

В. Ф. Бабенко*, В. А. Зонтов**

* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. *E-mail: babenko.vladislav@gmail.com*

** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. *E-mail: vladimir.zontov@gmail.com*

Отриманi новi точнi нерiвностi рiзних метрик типу Бернштейна у просторах сумовних функцiй для неперiодичних сплайнiв порядку m, мiнiмального дефекту, з рiвновiддаленими вузлами.

Ключовi слова: **неперiодичнi сплайни, нерiвностi рiзних метрик типу Бернштейна.**

Получены новые точные неравенства разных метрик типа Бернштейна в пространствах суммируемых функций для непериодических сплайнов порядка m, минимального дефекта, с равноудаленными узлами.

Ключевые слова: **непериодические сплайны, неравенства разных метрик типа Бернштейна.**

New exact Bernstein type inequalities of different metrics in spaces of integrable functions for non-periodic splines of order m and minimal defect, having equidistant nodes, are obtained.

Key words: **non-periodic splines, Bernstein type inequalities of different metrics.**

1. Введение

Через $L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, будем обозначать пространства функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, интегрируемых в p-й степени (существенно ограниченных при $p = \infty$) с соответствующими нормами $\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} = \left\{\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$, $\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \operatorname{vrai}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

Через $S_{m,h}$, $m \in \mathbb{N}$, $h > 0$, обозначим пространство заданных на $\mathbb{R}$ полиномиальных сплайнов порядка m, минимального дефекта, с узлами lh, $l \in \mathbb{Z}$. Пространство 2π-периодических сплайнов из $S_{m,\frac{\pi}{n}}$ будем обозначать через $\tilde{S}_{m,n}$.

Через $\varphi_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, обозначим m-й 2π-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0 = \operatorname{sgn}\sin t$. Отметим, что $\|\varphi_m\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = K_m$, где K_m– константы Фавара (см., например, [1, с. 105]),

$$K_m = \frac{4}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l(m+1)}}{(1+2l)^{m+1}}, \qquad m = 0, 1, \ldots .$$

Следующие точные неравенства типа Бернштейна для сплайнов из $\tilde{S}_{m,n}$

$$\left\|s^{(k)}\right\|_{L_p[0;2\pi]} \leq n^k \frac{\left\|\varphi_{m-k}\right\|_{L_p[0;2\pi]}}{\left\|\varphi_m\right\|_{L_p[0;2\pi]}} \left\|s\right\|_{L_p[0;2\pi]} \qquad (1)$$

установлены В.М. Тихомировым [2] в случае $p = \infty$, Ю.Н. Субботиным [3] в случае $p = 1$, В.Ф. Бабенко и С.А. Пичуговым [4] в случае $p = 2$. Изложение этих, а также других неравенств типа Бернштейна для периодических сплайнов, можно найти в [5, гл.6].

Отдельный интерес представляют неравенства типа Бернштейна вида

$$\left\|\widehat{f^{(k)}}\right\|_{L_q(\mathbb{R})} \leqslant C \left\|\widehat{f}\right\|_{L_p(\mathbb{R})}. \qquad (2)$$

Следующие точные неравенства типа Бернштейна для сплайнов из $\tilde{S}_{m,n}$ в случае $q \leqslant p$

$$\left\|s^{(k)}\right\|_{L_q[0;2\pi]} \leqslant n^k \frac{\left\|\varphi_{m-k}\right\|_{L_q[0;2\pi]}}{\left\|\varphi_m\right\|_{L_p[0;2\pi]}} \left\|s\right\|_{L_p[0;2\pi]}$$

были доказаны А.А. Лигуном для случаев $q \geqslant 1,\ p = \infty$ и $q = 1,\ p > 1$ [6], [7].
В случае $q > p$ отметим точное неравенство

$$\left\|s^{(k)}\right\|_{L_\infty[0;2\pi]} \leqslant n^{k+\frac{1}{p}} \frac{\left\|\varphi_{m-k}\right\|_{L_\infty[0;2\pi]}}{\left\|\varphi_m\right\|_{L_p[0;2\pi]}} \left\|s\right\|_{L_p[0;2\pi]},\ k = 1, ..., r,$$

полученное В.Ф. Бабенко, В.А. Кофановым, С.А. Пичуговым [8] для $p \geqslant 1$ и точное неравенство

$$\left\|s^{(k)}\right\|_{L_q[0;2\pi]} \leqslant n^{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\left\|\varphi_{m-k}\right\|_{L_q[0;2\pi]}}{\left\|\varphi_m\right\|_{L_p[0;2\pi]}} \left\|s\right\|_{L_p[0;2\pi]},$$

полученное В.А. Кофановым [9] для $p = 1$ или $p = 2$.
Для сплайнов из $S_{m,h} \bigcap L_\infty(\mathbb{R})$ известно следующее точное неравенство типа Бернштейна, полученное Г.Г. Магарил-Ильяевым [10],

$$\left\|s^{(m)}\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant \frac{\pi^m}{K_m h^m} \left\|s\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})}. \qquad (3)$$

Используя неравенство Колмогорова из (3) легко получить неравенство для любого $k = 1, \ldots, m-1$ (см. [11]).

Аналог (3) для $S_{m,h}\bigcap L_2(\mathbb{R})$ установлен В.Ф.Бабенко и С.А.Спектор [12]:

$$\left\|s^{(m)}\right\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\left(\frac{\pi}{h}\right)^m\sqrt{\frac{K_1}{K_{2m+1}}}\left\|s\right\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{4}$$

В работе [11] доказано следующее обобщение неравенства (4) для любого сплайна $s\in S_{m,h}\bigcap L_2(\mathbb{R})$ и любого $h>0$ при всех $k=1,\dots,m-1$:

$$\left\|s^{(k)}\right\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\left(\frac{\pi}{h}\right)^k\sqrt{\frac{K_{2(m-k)+1}}{K_{2m+1}}}\left\|s\right\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{5}$$

Также, в [11] для сплайнов $s\in S_{m,h}$, таких, что $\widehat{s}\in L_p(\mathbb{R}),\ 1\le p<\infty$ (здесь и везде ниже $\widehat{f}(\omega)=\int\limits_{\mathbb{R}}f(x)e^{-i\omega x}dx$ – преобразование Фурье функции f), получены точные неравенства, оценивающие $\left\|\widehat{s^{(k)}}\right\|_{L_p(\mathbb{R})}$ через $\left\|\widehat{s}\right\|_{L_p(\mathbb{R})}$:

$$\left\|\widehat{s^{(k)}}\right\|_{L_p(\mathbb{R})}\leqslant\left\{\frac{1}{h^{kp}}\max_{\omega}A_{p,m,k}(\omega)\right\}^{\frac{1}{p}}\left\|\widehat{s}\right\|_{L_p(\mathbb{R})}, \tag{6}$$

где

$$A_{p,m,k}(\omega)=\frac{\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|\omega+2\pi l|^{p(m-k+1)}}}{\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|\omega+2\pi l|^{p(m+1)}}}.$$

Неравенства вида (6) представляют интерес для изучения экстремальных задач теории аппроксимации в пространствах обобщенных функций умеренного роста, преобразования Фурье которых принадлежат заданному пространству $L_p(\mathbb{R})$. Такие пространства называются пространствами Хермандера (см. [13 - 15] по поводу теории и приложений таких пространств). Интересные результаты по исследованию экстремальных задач теории аппроксимации в пространствах Хермандера получены в [16, 17].

2. Основные результаты

Теорема. *Пусть $p,\ q\in[1,\infty)$, $p>q$. Пусть $m,k\in\mathbb{N},\ k\leqslant m$. Для любого сплайна $s\in S_{m,h}$ такого, что $\widehat{s}\in L_p(\mathbb{R})$, справедливо неулучшаемое неравенство*

$$\left\|\widehat{s^{(k)}}\right\|_{L_q(\mathbb{R})}\leqslant\left(\frac{1}{h}\right)^{k+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}C_{q,p,k}\left\|\widehat{s}\right\|_{L_p(\mathbb{R})}, \tag{7}$$

где

$$C_{q,p,k}=\left\{\int\limits_0^{2\pi}\frac{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|\omega+2\pi l|^{q(m-k+1)}}\right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|\omega+2\pi l|^{p(m+1)}}\right)^{\frac{q}{p-q}}}d\omega\right\}^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Доказательство теоремы. Данное неравенство достаточно доказать для $h = 1$, что следует из того факта, что $s(x) \in S_{m,h}$ тогда и только тогда, когда $s_h(x) = s(hx) \in S_{m,1}$, и соотношений

$$\|\widehat{s}\|_{L_p(\mathbb{R})} = h^{\frac{p-1}{p}}\|\widehat{s_h}\|_{L_p(\mathbb{R})}, \quad \|\widehat{s^{(k)}}\|_{L_q(\mathbb{R})} = h^{\frac{-q(k-1)-1}{q}}\|\widehat{s_h^{(k)}}\|_{L_q(\mathbb{R})}.$$

Любой сплайн из $S_{m,1}$ однозначно представим (см., например, [18]) в виде

$$s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu N_{m+1}(x+\nu), \tag{8}$$

где $N_m(x)$ – B-сплайн порядка m, заданный равенством

$$N_m(x) := (N_{m-1} * N_1)(x) = \int\limits_0^1 N_{m-1}(x-t)dt, \ \ m \geqslant 2,$$

N_1 – характеристическая функция интервала $[0, 1)$.

Используя стандартные свойства преобразования Фурье, для сплайна s вида (8) получим:

$$\widehat{s}(\omega) = m_s(\omega)\widehat{N_{m+1}}(\omega)$$

и

$$\widehat{s^{(k)}}(\omega) = (-i\omega)^k m_s(\omega)\widehat{N_{m+1}}(\omega),$$

где

$$m_s(\omega) := \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu e^{i\nu\omega}.$$

Тогда

$$\|\widehat{s}\|^p_{L_p(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{s}(\omega)|^p d\omega = \int\limits_{\mathbb{R}} \big|m_s(\omega)\big|^p \big|\widehat{N_{m+1}}(\omega)\big|^p d\omega = \int\limits_0^{2\pi} \big|m_s(\omega)\big|^p \sum_{l\in\mathbb{Z}} \big|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\big|^p d\omega$$

и

$$\|s^{(k)}\|^q_{L_q(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} |\omega|^{kq}|m_s(\omega)\widehat{N_{m+1}}(\omega)|^q d\omega = \int\limits_0^{2\pi} \big|m_s(\omega)\big|^q \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\omega+2\pi l|^{qk}\big|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\big|^q d\omega.$$

Применив неравенство Гёльдера с показателями $\frac{p}{p-q}$ и $\frac{p}{q}$, получим следующую оценку:

$$\|s^{(k)}\|^q_{L_q(\mathbb{R})} = \int\limits_0^{2\pi} \big|m_s(\omega)\big|^q \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\omega+2\pi l|^{qk}\big|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\big|^q d\omega =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} \left|\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)\right|^q}{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)\right|^p\right)^{\frac{q}{p}}} \left|m_s(\omega)\right|^q \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)\right|^p\right)^{\frac{q}{p}} d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int\limits_0^{2\pi} \frac{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} \left|\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)\right|^q\right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)\right|^p\right)^{\frac{q}{p-q}}} d\omega \right\}^{\frac{p-q}{p}} \times \left(\int\limits_0^{2\pi} \left|m_s(\omega)\right|^p \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)\right|^p d\omega \right)^{\frac{q}{p}} =$$

$$= \left\{ \int\limits_0^{2\pi} \frac{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} \left|\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)\right|^q\right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)\right|^p\right)^{\frac{q}{p-q}}} d\omega \right\}^{\frac{p-q}{p}} \left\|\widehat{s}\right\|^q_{L_p(\mathbb{R})}.$$

Учтем (см. [18]), что

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} \left|\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)\right|^q = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\omega + 2\pi l|^{q(m-k+1)}}, \tag{9}$$

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)\right|^p = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\omega + 2\pi l|^{p(m+1)}} \tag{10}$$

и ряды (9) и (10) равномерно сходятся на всей оси и их суммы непрерывны, причем (10) не обращается в нуль ни в одной точке. Получим неравенство

$$\|s^{(k)}\|^q_{L_q(\mathbb{R})} \leqslant \{C_{q,p,k}\}^q \left\|\widehat{s}\right\|^q_{L_p(\mathbb{R})}.$$

Докажем точность полученного неравенства. Для этого, прежде всего, положим

$$m_s(\omega) = \frac{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} \left|\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)\right|^q\right)^{\frac{1}{p-q}}}{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)\right|^p\right)^{\frac{1}{p-q}}}. \tag{11}$$

Разложим функцию m_s в ряд Фурье

$$m_s(\omega) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} a_\nu e^{i\nu\omega}$$

и определим сплайн $s_0(x)$, следующим образом:

$$s_0(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} a_\nu N_{m+1}(x + \nu),$$

или, в образах Фурье,

$$\widehat{s_0}(\omega) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} a_\nu e^{i\nu\omega}\widehat{N_{m+1}}(\omega) = m_{s_0}(\omega)\widehat{N_{m+1}}(\omega).$$

Тогда, учитывая, что $m_{s_0}(\omega)$ удовлетворяет (11), получим

$$\left\|\widehat{s_0}\right\|^p_{L_p(\mathbb{R})} = \int_0^{2\pi}\left|m_{s_0}(\omega)\right|^p \sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^p d\omega =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}|\omega+2\pi l|^{qk}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^q\right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^p\right)^{\frac{p}{p-q}}} \sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^p d\omega =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}|\omega+2\pi l|^{qk}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^q\right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^p\right)^{\frac{q}{p-q}}} d\omega,$$

то есть

$$\left\|\widehat{s_0}\right\|_{L_p(\mathbb{R})} = \left\{\int_0^{2\pi} \frac{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}|\omega+2\pi l|^{qk}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^q\right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^p\right)^{\frac{q}{p-q}}} d\omega\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Кроме того,

$$\left\|\widehat{s_0^{(k)}}\right\|^q_{L_q(\mathbb{R})} = \int_0^{2\pi}\left|m_{s_0}(\omega)\right|^q \sum_{l\in\mathbb{Z}}|\omega+2\pi l|^{qk}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^q d\omega =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}|\omega+2\pi l|^{qk}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^q\right)^{\frac{q}{p-q}}}{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^p\right)^{\frac{q}{p-q}}} \sum_{l\in\mathbb{Z}}|\omega+2\pi l|^{qk}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^q d\omega =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}|\omega+2\pi l|^{qk}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^q\right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^p\right)^{\frac{q}{p-q}}} d\omega.$$

Таким образом

$$\left\|\widehat{s_0^{(k)}}\right\|_{L_q(\mathbb{R})} = \left\{\int\limits_0^{2\pi} \frac{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} |\omega+2\pi l|^{qk}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^q\right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^p\right)^{\frac{q}{p-q}}} d\omega\right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^{2\pi} \frac{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} |\omega+2\pi l|^{qk}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^q\right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^p\right)^{\frac{q}{p-q}}} d\omega\right\}^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \left\{\int\limits_0^{2\pi} \frac{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} |\omega+2\pi l|^{qk}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^q\right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left(\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{N_{m+1}}(\omega+2\pi l)\right|^p\right)^{\frac{q}{p-q}}} d\omega\right\}^{\frac{1}{p}} = C_{q,p,k}\left\|\widehat{s_0}\right\|_{L_p(\mathbb{R})}.$$

Теорема полностью доказана.

Библиографические ссылки

1. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения/ Н.П. Корнейчук.– М.: Наука, 1987.
2. *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений/ В.М. Тихомиров// Успехи мат. наук.– 1960.– 15, №3 С.81–120.
3. *Субботин Ю.Н.* О кусочно-полиномиальной интерполяции/ Ю.Н. Субботин// Мат. заметки. 1967.– 1, №1 С.24–29.
4. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Бернштейна для полиномиальных сплайнов в пространстве L_2/ В.Ф. Бабенко, С.А. Пичугов// Укр. мат. журн.– 1991.– 43, №3 С.420—422.
5. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов/ Н.П. Корнейчук, В.Ф. Бабенко, А.А. Лигун// К.: Наук. думка, 1992.
6. *Лигун А.А.* Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций/ А.А. Лигун// Мат. заметки.– 1976.– 19, № 6.– С.913–926.
7. *Лигун А.А.* О неравенствах между нормами производных периодических функций/ А.А. Лигун// Мат. заметки.– 1983.– 33, № 3.– С.385–391.
8. *Корнейчук Н.П.* Неравенства для производных и их приложения/ Н.П. Корнейчук, В.Ф. Бабенко, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов.– К.: Наук. думка, 2003.– 590 с.

9. *Кофанов В.А.* О точных неравенствах типа Бернштейна для сплайнов/ В.А. Кофанов// Укр. мат. журнал, 2006.– т.58, № 10 С.1357-1367
10. *Магарил-Ильяев Г.Г.* О наилучшем приближении сплайнами классов функций на прямой/ Г.Г. Магарил-Ильяев// Труды Математического института РАН - 1992.– т.194.– С.148-159.
11. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Бернштейна для сплайнов, заданных на действительной оси/ В.Ф. Бабенко, В.А. Зонтов// Укр. мат. журн.– 2011.– 63, №5.– С.603-611.
12. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Бернштейна для сплайнов в пространстве $L_2(R)$/ В.Ф. Бабенко, С.А. Спектор// Вісник Дніпропетр. ун-ту, серія: Математика: 2008, т.16, N 6/1, С.21-27.
13. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными/ Л. Хермандер.– М.: Мир, 1965.– 380 с.
14. *Волевич Л.Р.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения/ Л.Р. Волевич, Б.П. Панеях// Успехи мат. наук.– 1965.- 20, № 1 – С.3-74.
15. *Михайлец В.А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи/ В.А. Михайлец, А.А. Мурач.– К., 2010, 372 с.
16. *Стрелков Н.А.* Проекционно-сеточные поперечники и решетчатые укладки/ Н.А. Стрелков// Мат. сб., 182:10 (1991), С.1513–1533.
17. *Стрелков Н.А.* Универсально оптимальные всплески/ Н.А. Стрелков// Мат. сб., 188:1 (1997), С.147–160.
18. *Чуи К.* Введение в вейвлеты/ К. Чуи.– М., 2008.

Надійшла до редколегії 01.01.2013