О РЕАЛИЗАЦИИ ОБОБЩЕННЫХ РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЕЙ В ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. А. ОГНЕВА, В. М. ЧЕРНЫШЕНКО

Пусть в некоторой области D векторного пространства $E_к$ задана нелинейная операция $y=P(x)$, значения которой принадлежат векторному пространству E_l. Операцию $P(x)$ будем предполагать непрерывно дифференцируемой по Фреше достаточное число раз. Возьмем в области D два элемента

$$z_1=(x_1^{(1)},\dots,x_к^{(1)}),\ z_2=(x_1^{(2)},\dots,x_к^{(2)}).$$

Первая обобщенная разделенная разность операции $P(x)$ [2] задается набором функций

$$a_{ij}=a_{ij}(x_1^{(1)},\dots,x_к^{(1)};x_1^{(2)},\dots,x_к^{(2)}),\ i=1,2,\dots,l,\ j=1,2,\dots,k,$$

которые определяются из системы уравнений

$$a_{i1}(x_1^{(2)}-x_1^{(1)})+\dots+a_{iк}(x_к^{(2)}-x_к^{(1)})=f_i(x_1^{(2)},\dots,x_к^{(2)})-$$
$$-f_i(x_1^{(1)},\dots,x_к^{(1)}),\tag{1}$$

где $f_i(x)$ есть i-ая компонента вектора $P(x)$

Решая систему (1) при $k=2$, мы получим:

$$a_{i1}=\frac{f_i(x_1^{(2)},x_2^{(2)})-f_i(x_1^{(1)},x_2^{(2)})}{x_1^{(2)}-x_1^{(1)}}-\alpha_{i2}^{(1)}(x_1^{(1)},x_2^{(1)};\ x_1^{(2)},x_2^{(2)})\,\delta_2$$

$$a_{i2}=\frac{f_i(x_1^{(1)},x_2^{(2)})-f_i(x_1^{(1)},x_2^{(1)})}{x_2^{(2)}-x_2^{(1)}}+\alpha_{i2}^{(1)}(x_1^{(1)},x_2^{(1)};\ x_1^{(2)},x_2^{(2)})\,\delta_1\tag{2}$$

$$s=1,2;\ i=1,2,\dots,l;\ \delta_s=x_s^{(2)}-x_s^{(1)}.$$

Функции $\alpha_{i2}^{(1)}$, входящие в формулы (2), предполагаются непрерывно дифференцируемыми по всем своим аргументам. Применяя метод полной математической индукции, легко получить формулы для функций a_{ij}, определяющих первую разделенную разность нелинейной операции $P(x)$, действующей из $E_к$ в E_l. Приведем алгоритм для получения $(s+1)$-ой разделенной разности операции $P(x)$ из ее s-ой разделенной разности. Разделенные разности порядка s функций f_i будем записывать в виде $f_i(X_1,X_2,\dots,X_к)$ и X_j будем называть группой j-го аргумента; X_j может состоять как из одного значения j-го аргумента функции f_i, так и из нескольких значений этого аргумента.

Пусть

$$a_{ip_1p_2\dots p_s} = a_{ip_1p_2\dots p_s}(x_1^{(1)}, \dots, x_к^{(1)}; \dots; x_1^{(s+1)}, \dots, x_к^{(s+1)}),$$

$$i = 1, 2, \dots, l \quad p_\nu = 1, 2, \dots, k, \quad \nu = 1, 2, \dots, s$$

суть функции, определяющие s-ую разделенную разность операции $P(x)$. Разделенная разность операции $P(x)$ порядка $(s+1)$ задается набором функций

$$a_{ip_1p_2\dots p_s p_{s+1}} = a_{ip_1p_2\dots p_s p_{s+1}}(x_1^{(1)}, \dots, x_к^{(1)}; \dots; x_1^{(s+2)}, \dots, x_к^{(s+2)}),$$

которые определяются из системы уравнений:

$$a_{ip_1p_2\dots p_s1}(x_1^{(s+2)} - x_1^{(s+1)}) + \dots + a_{ip_1p_2\dots p_sк}(x_к^{(s+2)} - x_к^{(s+1)}) =$$

$$= a_{ip_1p_2\dots p_s}(x_1^{(1)}, \dots, x_к^{(1)}; \dots; x_1^{(s)}, \dots, x_к^{(s)}; x_1^{(s+2)}, \dots, x_к^{(s+2)}) -$$

$$- a_{ip_1p_2\dots p_s}(x_1^{(1)}, \dots, x_к^{(1)}; \dots; x_1^{(s)}, \dots, x_к^{(s)}; x_1^{(s+1)}, \dots, x_к^{(s+1)})$$

$$i = 1, 2, \dots, l, \quad p_\nu = 1, 2, \dots, k, \quad \nu = 1, 2, \dots, s. \tag{3}$$

Предположим, что функции, определяющие s-ую разделенную разность, имеют вид

$$a_{ip_1p_2\dots p_s} = b_{ip_1p_2\dots p_s} f_i(X_1, X_2, \dots, X_к) +$$
$$+ B_{ip_1p_2\dots p_s}(x_1^{(1)}, \dots, x_к^{(1)}; \dots; x_1^{(s+1)}, \dots, x_к^{(s+1)}).$$

Здесь $b_{ip_1p_2\dots p_s}$ может принимать значения 0, 1.

Решая систему (3), получим

$$a_{ip_1p_2\dots p_s1} = b_{ip_1p_2\dots p_s1} f_i(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots, \overline{X}_к) +$$

$$+ B_{ip_1p_2\dots p_s}(x_1^{(1)}, \dots, x_к^{(1)}; \dots; x_1^{(s)}, \dots, x_к^{(s)}, x_1^{(s+2)}\ x_1^{(s+1)}, x_2^{(s+2)}, \dots, x_к^{(s+2)}) -$$

$$- \sum_{m=2}^{к} A^{(1)}_{ip_1p_2\dots p_sm}(x_1^{(1)}, \dots, x_к^{(1)}; \dots; x_1^{(s+2)}, \dots, x_к^{(s+2)}) \times$$

$$\times (x_m^{(s+2)} - x_m^{(s+1)}) - \sum_{n=2}^{к-1} \sum_{m=n+1}^{к} A^{(m)}_{ip_1p_2\dots p_sn} \times$$

$$\times (x_1^{(1)}, \dots, x_к^{(1)}; \dots; x_1^{(s+1)}, \dots, x_к^{(s+1)}; x_1^{(s+2)}\ x_1^{(s+1)}, x_2^{(s+2)}, \dots, x_к^{(s+2)}) \times$$

$$\times (x_n^{(s+2)} - x_n^{(s+1)})(x_m^{(s+2)} - x_m^{(s+1)}), \tag{4}$$

где $b_{ip_1p_2\dots p_s1}$ равно нулю, если $b_{ip_1p_2\dots p_s}$ равно нулю или в группе первого аргумента X_1 нет $x_1^{(s+1)}$, в противном случае $b_{ip_1p_2\dots p_s1}$ равно единице.

Группы аргументов $\overline{X}_j$ получаются из групп аргументов $X_j (j = 1, 2, \ldots, k)$ по следующему правилу: группа первого аргументна X_1 пополняется аргументом $x_1^{(s+2)}$, а во всех остальных группах аргументов $x_j^{(s+1)}$ заменяется на $x_j^{(s+2)}$.

$$
\begin{gathered}
a_{ip_1p_2\ldots p_sj} = b_{ip_1p_2\ldots p_sj}\, f_i(\overline{\overline{X}}_1, \overline{\overline{X}}_2, \ldots, \overline{\overline{X}}_k) + \\
+ B_{ip_1p_2\ldots p_s}(x_1^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)}; \ldots; x_1^{(s)}, \ldots, x_k^{(s)}; x_1^{(s+1)}, x_2^{(s+2)}, \ldots, x_{j-1}^{(s+2)}, \\
x_j^{(s+2)}\, x_j^{(s+1)}, x_{j+1}^{(s+1)}, \ldots, x_k^{(s+1)}) - \sum_{n=4}^{j} \sum_{m=2}^{n-2} A^{(n-1)}_{ip_1p_2\ldots p_sm}(x_1^{(1)} \ldots, \\
\ldots, x_k^{(1)}; \ldots; x_1^{(s+1)}, \ldots, x_k^{(s+1)}; x_1^{(s+1)}, x_2^{(s+2)}, \ldots, x_{j-1}^{(s+2)}, \\
x_j^{(s+2)}\, x_j^{(s+1)}, x_{j+1}^{(s+1)}, \ldots, x_k^{(s+1)})\,(x_{n-1}^{(s+2)} - x_{n-1}^{(s+1)})\,(x_m^{(s+2)} - x_m^{(s+1)}) - \\
- \sum_{m=2}^{j-1} A^{(j)}_{ip_1p_2\ldots p_sm}(x_1^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)}; \ldots; x_1^{(s+1)}, \ldots, x_k^{(s+1)}; \\
x_1^{(s+1)}, x_2^{(s+2)}, \ldots, x_j^{(s+2)}, x_{j+1}^{(s+1)}, \ldots, x_k^{(s+1)})\,(x_m^{(s+2)} - x_m^{(s+1)}) + \\
+ A^{(1)}_{ip_1p_2\ldots p_sj}(x_1^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)}; \ldots; x_1^{(s+2)}, \ldots, x_k^{(s+2)})\,(x_1^{(s+2)} - x_1^{(s+1)}) + \\
+ \sum_{m=j+1}^{k} A^{(m)}_{ip_1p_2\ldots p_sj}(x_1^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)}; \ldots; x_1^{(s+2)}, \ldots, x_k^{(s+2)})\,(x_m^{(s+2)} - x_m^{(s+1)}), \\
j = 2, 3, \ldots, k, \qquad (5)
\end{gathered}
$$

где $b_{ip_1p_2\ldots p_sj}$ равно нулю, если $b_{ip_1p_2\ldots p_s}$ равно нулю или в группе j-го аргумента X_j нет $x_j^{(s+1)}$, в противном случае $b_{ip_1p_2\ldots p_sj}$ равно единице.

Группы аргументов $\overline{\overline{X}}_j$ получаются из групп аргументов X_j по следующему правилу: группа первого аргумента X_1 остается без изменения, в группах аргументов $X_r (2 \leqslant r \leqslant j-1)$ аргумент $x_r^{(s+1)}$ заменяется на $x_r^{(s+2)}$, группы аргументов $X_\mu (\mu > j)$ остаются без изменения, группа j-го аргумента пополняется аргументом $x_j^{(s+2)}$.

В формулах (4)—(5) функции

$$
A^{(n)}_{ip_1p_2\ldots p_sm} = A^{(n)}_{ip_1p_2\ldots p_sm}(x_1^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)}; \ldots; x_1^{(s+2)}, \ldots, x_k^{(s+2)})
$$

$$
i = 1, 2, \ldots, l, \quad p_\nu = 1, 2, \ldots, k, \quad \nu = 1, 2, \ldots, s, \quad 1 \leqslant m, \ n \leqslant k
$$

суть произвольные функции, непрерывно дифференцируемые по всем своим аргументам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. I.
2. Черньшенко В. М. Сборник работ межвузовской городской тематической конференции, г. Днепропетровск, 1966 г., изд-во ХГУ, стр. 19—24.

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПОСРЕДСТВОМ СТУПЕНЧАТЫХ ФУНКЦИЙ

Н. Д. РЫЩЕНКО

Пусть $f(x,y)$ непрерывная функция в прямоугольнике $s[0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1]$. Рассмотрим приближение этой функции многочленами вида: $P_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} a_i(y)\chi_i(x)$,

где
$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] = E_i^{(1)} \\ 0 & x \in [0, 1] / E_i^{(1)} \end{cases}$$

и $a_i(y)$ —некоторая непрерывная функция.

Наилучшее приближение функции $f(x,y)$ многочленами $P_n^{(1)}(x, y)$ обозначим через $E_n^{(1)}(f) = \inf\limits_{P_n^{(1)}} \sup\limits_{x,y} |f - P_n^{(1)}|$.

Нетрудно видеть, что оно осуществляется при

$$a_i(y) = \frac{\sup\limits_{x \in E_i^{(1)}} f + \inf\limits_{x \in E_i^{(1)}} f}{2}.$$

Аналогично $P_m^{(2)}(x, y) = \sum_{k=1}^{m} b_k(x)\chi_k(y)$,

где
$$\chi_k(y) = \begin{cases} 1 & y \in \left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right] = E_k^{(2)} \\ 0 & y \in [0, 1] / E_k^{(2)} \end{cases}$$

и $b_k(x)$ — произвольная непрерывная функция на [0, 1].