УДК 517.5

Неравенства типа Харди-Литтлвуда-Полиа для операторов в гильбертовом пространстве

В. Ф. Бабенко, Н. А. Крячко

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050.

E-mail: babenko.vladislav@gmail.com, nadiakriachko@gmail.com

Отримані точна «мультиплікативна» і точні «адитивні» нерівності типу Харді-Літлвуда-Поліа для операторів у гільбертовому просторі.

Ключові слова: гільбертів простір, оператор, нерівності типу Харді-Літлвуда-Поліа.

Получены точное «мультипликативное» и точные «аддитивные» неравенства типа Харди-Литтлвуда-Полиа для операторов в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: гильбертово пространство, оператор, неравенства типа Харди-Литтлвуда-Полиа.

Have been received exact «multiplicative» and exact «additive» inequalities of Hardy-Littlewood-Polya's type for operators in Hilbert space.

Key words: Hilbert space, operator, inequalities of Hardy-Littlewood-Polya's.

1. Введение

Пусть $\mathbb{G}$ — действительная ось $\mathbb{R}$ или единичная окружность $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$. Через $L_2(\mathbb{G})$ будем обозначать пространство измеримых функций $x : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что

$$\|x\|_2 := \|x\|_{L_2(\mathbb{G})} = \left(\int_{\mathbb{G}} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty;$$

$L_2^r(\mathbb{G})$, $r \in \mathbb{N}$, — пространство всех функций x , которые имеют локально абсолютно непрерывные производные $x^{(r-1)}$ и $x^{(r)} \in L_2(\mathbb{G})$; $L_{2,2}^r(\mathbb{G}) = L_2(\mathbb{G}) \cap L_2^r(\mathbb{G})$.

Хорошо известно [1], что для любой функции $x \in L_{2,2}^r(\mathbb{R})$ выполняется точное неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа

$$\|x^{(k)}\|_2 \leq \|x\|_2^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_2^{k/r}, \quad r, k \in \mathbb{N}, \quad k < r. \quad (1.1)$$

Неравенство (1.1) эквивалентно семейству аддитивных неравенств

$$\|x^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq A \|x\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \frac{k}{r} \left(\frac{r-k}{rA} \right)^{\frac{r-k}{k}} \|x^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{R})}^2, \quad (1.2)$$

и для любого заданного $A > 0$ константа $\frac{k}{r} \left(\frac{r-k}{rA} \right)^{\frac{r-k}{k}}$ неулучшаема [2, §5.4].

Неравенство (1.1) (и, следовательно, неравенство (1.2)) выполняется также для любой функции $x \in L_{2,2}^r(\mathbb{T})$. Однако, константа $\frac{k}{r} \left(\frac{r-k}{rA} \right)^{\frac{r-k}{k}}$, в отличие от непериодического случая, вообще говоря, не является точной [1]. Задача отыскания неулучшаемых аддитивных неравенств для функций класса $L_{2,2}^r(\mathbb{T})$ решена в [2] (см. также [3, §5.4]).

Данная работа посвящена получению точных неравенств типа Харди-Литтлвуда-Полиа для достаточно произвольных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве, а также неулучшаемых аддитивных неравенств для таких операторов.

2. Обобщение мультипликативного неравенства типа Харди-Литтлвуда-Полиа

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство над полем комплексных чисел со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Пусть также $\{e_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ — ортонормированный базис в H . Рассмотрим комплекснозначные функции f и φ , заданные на множестве целых чисел, такие, что $|f(\nu)| = |f(-\nu)|$, $|\varphi(\nu)| = |\varphi(-\nu)|$ для любого $\nu \in \mathbb{Z}$, $|f(\nu)|$ и $|\varphi(\nu)|$ не убывают с ростом $|\nu|$ и связаны соотношением

$$|\varphi(\nu)|^2 = \alpha(|f(\nu)|^2), \quad (2.1)$$

где $\alpha(t)$, $t \geq 0$, — выпуклая вверх неубывающая функция, $\alpha(0) = 0$.

Пусть $c_\nu = (x, e_\nu)$ — коэффициенты Фурье элемента x и $\sum_\nu c_\nu e_\nu$ — его ряд Фурье.

Определим следующим образом операторы A_f и A_φ . Для $x = \sum_\nu c_\nu e_\nu$ положим

$$A_f x = \sum_\nu f(\nu) c_\nu e_\nu, \quad D_{A_f} = \left\{ x : \sum_\nu |f(\nu)|^2 |c_\nu|^2 < \infty \right\};$$

$$A_\varphi x = \sum_\nu \varphi(\nu) c_\nu e_\nu, \quad D_{A_\varphi} = \left\{ x : \sum_\nu |\varphi(\nu)|^2 |c_\nu|^2 < \infty \right\}.$$

Используя (2.1) и неравенство Иенсена, нетрудно проверить, что $D_{A_f} \subset D_{A_\varphi}$.

Теорема 1. Для любого $x \in D_{A_f}$ справедливо следующее неравенство

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq \|x\|^2 \alpha \left(\frac{1}{\|x\|^2} \|A_f x\|^2 \right), \quad (2.2)$$

которое обращается в равенство на любом элементе базиса e_ν , $\nu \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Для $x \in D_{A_f}$ с учетом (2.1) получим

$$\|A_\varphi x\|^2 = \sum_\nu \alpha(|f(\nu)|^2) |c_\nu|^2 = \|x\|^2 \sum_\nu \alpha(|f(\nu)|^2) \frac{|c_\nu|^2}{\|x\|^2}.$$

К последнему выражению применим неравенство Иенсена (α — выпуклая вверх функция, $\sum_\nu \frac{|c_\nu|^2}{\|x\|^2} = 1$). Получим

$$\begin{aligned} \|x\|^2 \sum_\nu \alpha(|f(\nu)|^2) \frac{|c_\nu|^2}{\|x\|^2} &\leq \|x\|^2 \alpha \left(\frac{1}{\|x\|^2} \sum_\nu |f(\nu)|^2 |c_\nu|^2 \right) = \\ &= \|x\|^2 \alpha \left(\frac{1}{\|x\|^2} \|A_f x\|^2 \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq \|x\|^2 \alpha \left(\frac{1}{\|x\|^2} \|A_f x\|^2 \right).$$

Покажем, что неравенство (2.2) обращается в равенство на любом элементе базиса e_ν . Действительно, для $x = e_{\nu_0}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|A_\varphi e_{\nu_0}\|^2 &= \|\varphi(\nu_0) e_{\nu_0}\|^2 = |\varphi(\nu_0)|^2 = \alpha(|f(\nu_0)|^2) = \\ &= \|e_{\nu_0}\|^2 \alpha \left(\frac{1}{\|e_{\nu_0}\|^2} \|f(\nu_0) e_{\nu_0}\|^2 \right) = \|e_{\nu_0}\|^2 \alpha \left(\frac{1}{\|e_{\nu_0}\|^2} \|A_f e_{\nu_0}\|^2 \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Неравенство (2.2) представляет собой обобщение классического неравенства Харди-Литтлвуда-Поля. В частности, в неравенстве (2.2) содержится классическое неравенство Харди-Литтлвуда-Поля для периодических функций.

3. Точные «аддитивные» неравенства типа Харди-Литтлвуда-Полиа

Рассмотрим задачу получения семейства «аддитивных» неравенств вида

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq K \|A_f x\|^2 + C_K \|x\|^2, \quad (3.1)$$

точных в том смысле, что для любого допустимого K константу C_K уменьшить нельзя. В дополнение к наложенным в начале п. 2 условиям на функции f , φ и α будем предполагать, что функция f строго возрастает, $f(0) = 0$, α дифференцируема в любой точке $t > 0$, причем $\alpha'(t) \rightarrow 0$, если $t \rightarrow +\infty$.

Для любого $K > 0$ можем написать

$$\begin{aligned} \|A_\varphi x\|^2 &= \sum_{\nu} |\varphi(\nu)|^2 |c_\nu|^2 = \\ &= K \sum_{\nu} |f(\nu)|^2 |c_\nu|^2 + \sum_{\nu} (|\varphi(\nu)|^2 - K |f(\nu)|^2) |c_\nu|^2 \leq \\ &\leq K \|A_f x\|^2 + \sup_{\nu} (|\varphi(\nu)|^2 - K |f(\nu)|^2) \|x\|^2 = \\ &= K \|A_f x\|^2 + \sup_{\nu} (\alpha(|f(\nu)|^2) - K |f(\nu)|^2) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Для $\nu = 0, 1, \dots$ положим $\gamma_\nu = |f(\nu)|^2$. Полученное выше неравенство перепишем в виде

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq K \|A_f x\|^2 + \sup_{\nu} (\alpha(\gamma_\nu) - K \gamma_\nu) \|x\|^2.$$

Отметим, что если $K \geq \frac{\alpha(\gamma_1)}{\gamma_1}$, то

$$\sup_{\nu} (\alpha(\gamma_\nu) - K \gamma_\nu) = 0.$$

Поэтому ниже предполагаем, что $K < \frac{\alpha(\gamma_1)}{\gamma_1}$.

Рассмотрим последовательность

$$\psi_\nu = \frac{\alpha(\gamma_\nu) - \alpha(\gamma_{\nu-1})}{\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Из выпуклости функции α следует, что последовательность $\{\psi_\nu\}$ является невозрастающей, а из условия $\alpha'(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ следует, что $\inf_{\nu} \psi_\nu = 0$.

Для $\nu = 1, 2, \dots$, рассмотрим разности

$$\begin{aligned} \delta_\nu &= \alpha(\gamma_\nu) - K \gamma_\nu - \alpha(\gamma_{\nu-1}) + K \gamma_{\nu-1} = \\ &= (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) \left(\frac{\alpha(\gamma_\nu) - \alpha(\gamma_{\nu-1})}{\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}} - K \right). \end{aligned}$$

Пусть $K \in \left(0, \frac{\alpha(\gamma_1)}{\gamma_1}\right)$. Если значение ν_0 таково, что

$$\psi_{\nu_0+1} \leq K \leq \psi_{\nu_0},$$

то для $\nu \leq \nu_0$ будет $\delta_\nu \geq 0$, а для $\nu > \nu_0$ будет $\delta_\nu < 0$. Отсюда следует, что

$$\max_{\nu} (\alpha(\gamma_\nu) - K\gamma_\nu) = \alpha(\gamma_{\nu_0}) - K\gamma_{\nu_0}.$$

Отметим, что при $K = \psi_{\nu_0}$

$$\begin{aligned} \alpha(\gamma_{\nu_0}) - K\gamma_{\nu_0} &= \alpha(\gamma_{\nu_0}) - \frac{\alpha(\gamma_{\nu_0}) - \alpha(\gamma_{\nu_0-1})}{\gamma_{\nu_0} - \gamma_{\nu_0-1}} \gamma_{\nu_0} = \\ &= \frac{\gamma_{\nu_0} \alpha(\gamma_{\nu_0-1}) - \gamma_{\nu_0-1} \alpha(\gamma_{\nu_0})}{\gamma_{\nu_0} - \gamma_{\nu_0-1}}, \end{aligned}$$

а при $K = \psi_{\nu_0+1}$

$$\begin{aligned} \alpha(\gamma_{\nu_0}) - K\gamma_{\nu_0} &= \alpha(\gamma_{\nu_0}) - \frac{\alpha(\gamma_{\nu_0+1}) - \alpha(\gamma_{\nu_0})}{\gamma_{\nu_0+1} - \gamma_{\nu_0}} \gamma_{\nu_0} = \\ &= \frac{\gamma_{\nu_0+1} \alpha(\gamma_{\nu_0}) - \gamma_{\nu_0} \alpha(\gamma_{\nu_0+1})}{\gamma_{\nu_0+1} - \gamma_{\nu_0}}. \end{aligned}$$

Обозначим через $l(K)$ ломаную с узлами в точках ψ_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, которая в узлах интерполирует значения

$$\frac{\gamma_\nu \alpha(\gamma_{\nu-1}) - \gamma_{\nu-1} \alpha(\gamma_\nu)}{\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}}.$$

Подытоживая сказанное, видим, что справедлива

Теорема 2. При сделанных выше предположениях относительно функций f , φ и α для любого $x \in D_{A_f}$ имеет место неравенство

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq K \|A_f x\|^2 + l(K) \|x\|^2.$$

Покажем, что константа $l(K)$ для любого $K \in \left(0, \frac{\alpha(\gamma_1)}{\gamma_1}\right)$ неуллучшаема. Возьмем произвольное $K \in \left(0, \frac{\alpha(\gamma_1)}{\gamma_1}\right)$ и выберем ν_0 так, чтобы $\psi_{\nu_0+1} \leq K \leq \psi_{\nu_0}$. Для $x = e_{\nu_0}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|A_\varphi x\|^2 &= \|A_\varphi e_{\nu_0}\|^2 = |\varphi(\nu_0)|^2 = \alpha(|f(\nu_0)|^2) = \\ &= K |f(\nu_0)|^2 + (\alpha(\gamma_{\nu_0}) - K\gamma_{\nu_0}) \|e_{\nu_0}\|^2 = \\ &= K \|A_f x\|^2 + l(K) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Библиографические ссылки

1. *Харди Г. Г.* Неравенства / Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд, Г. Полиа. — М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. — 456 с.
2. *Babenko V. F.* On Exact Inequalities of Hardy-Littlewood-Polya Type / V. F. Babenko, T. M. Rassias // J. of Mathematical Analysis and Applications, 2000. — 245. — P. 570–593.
3. *Бабенко В. Ф.* Неравенства для производных и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов. — К. : Наук. думка, 2003. — 590 с.

Надійшла до редколегії 04.05.2013