Функция Ψ, очевидно, удовлетворяет всем тем требованиям, которым должна удвлетворять функция Ω. Этим наше утверждение полностью доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. К. Рашевский. Курс дифференциальной геометрии. Гостехиздат, Москва, 1956 г.

2. И. С. Березин и Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. II. Физматгиз, Москва, 1959 г.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

Н. Я. ЯЦЕНКО

1. Пусть $\tilde{C}$ — класс непрерывных 2π-периодических функций. Зададим систему точек $x_к = \frac{2k\pi}{N}$ $(k=1, 2, ..., N, N = m(2n+1), m=1, 2, ...)$. Тогда полином наилучшего среднеквадратического приближения порядка n имеет вид

$$T_п^N(f, x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_к)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x_к - x)}{\sin\frac{1}{2}(x_к - x)}.$$

Рассмотрим сумму

$$\omega_{пр}^{(r)}(f, x, \alpha_п)\frac{1}{2^r} = \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\sigma_{пр}^N[f, x-(r-2i)\alpha_п], \qquad (1)$$

где

$$\sigma_{пр}^N(f, x) = \frac{1}{p+1}\sum_{\nu=0}^{p} T_{п-\nu}^N(f, x) \qquad (0 \leqslant p \leqslant n),$$

r-конечное натуральное число, $\alpha_п = O(1/n)$, и изучим ее с точки зрения сходимости к функции $f(x)$ для всех $f(x) \in \tilde{C}$ равномерно относительно x. Эта сумма представляет собой r-ую итерацию суммы.

$$\omega_{\text{пр}}(f, x, \alpha_{\text{п}}) = \frac{1}{2}\{\sigma^{\text{N}}_{\text{пр}}(f, x-\alpha_{\text{п}}) + \sigma^{\text{N}}_{\text{пр}}(f, x+\alpha_{\text{п}})\},$$

рассмотренной в работе Н. М. Павловского[2].

Положим

$$L^{(\text{r})}_{\text{пр}}(x, \alpha_{\text{п}}) = \sup_{|f| \leqslant 1} |\omega^{(\text{r})}_{\text{пр}}(f, x, \alpha_{\text{п}})|.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. При $n \to \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$L^{(\text{r})}_{\text{пр}}(x, \alpha_{\text{п}}) = \frac{2\ln\frac{n}{p+1}}{m\pi}\left|\cos^{\text{r}}\frac{2n+1}{2}\alpha_{\text{п}}\right| \times$$
$$\times \cos\left(\frac{2n+1}{2}x - \frac{\pi}{2m}\right)\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2m} + O(1),$$

где $O(1)$ — величина равномерно ограниченная относительно x, m, n и p.

Теорема 2. Для того, чтобы имело место равенство

$$\lim_{\text{п}\to\infty}\omega^{(\text{r})}_{\text{пр}}(f, x, \alpha_{\text{п}}) = f(x)$$

при неограниченном n/p для всех $f(x) \in \tilde{C}$ равномерно относительно x, необходимо и достаточно, чтобы

$$\alpha_{\text{п}} = \frac{2k\pi}{2n+1} + O\left(\frac{1}{n\sqrt[r]{\ln\frac{n}{p+1}}}\right),$$

где k принимает конечные нечетные значения.

2. Рассмотрим теперь сумму (1) для функции $f(x, y)$ двух переменных. Пусть $M = u(2m+1)$ $(u = 1, 2, \ldots)$, $N = v(2n+1)$ $(v = 1, 2, \ldots)$, $x_{\text{к}} = \frac{2k\pi}{M}$ $(k = 1, 2, \ldots, M)$, $y_l = \frac{2l\pi}{N}$ $(l = 1, 2, \ldots, N)$,

$$0 \leqslant p \leqslant m, \quad 0 \leqslant q \leqslant n, \quad \alpha_{\text{m}} = O\left(\frac{1}{m}\right), \quad \beta = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Тогда имеем

$$\omega_{mpnq}^{(rs)} = \frac{1}{2^{r+s}(p+1)(q+1)MN} \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{N} f(x_k, y_l) \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} \binom{r}{i} \binom{s}{j} \times$$

$$\times \frac{\sin\frac{2m-p+1}{2}[x_k - x + (r-2i)\alpha_m] \sin\frac{p+1}{2}[x_k - x + (r-2i)\alpha_m]}{\sin^2\frac{1}{2}[x_k - x + (r-2i)\alpha_m]} \times$$

$$\times \frac{\sin\frac{2n-q+1}{2}[y_l - y + (s-2j)\beta_n] \sin\frac{q+1}{2}[y_l - y + (s-2j)\beta_n]}{\sin^2\frac{1}{2}[y_l - y + (s-2j)\beta_n]},$$

где r и s — конечные натуральные числа.

Положим

$$L_{mpnq}^{(rs)}(x, y, \alpha_m, \beta_n) = \sup_{|f| \leqslant 1} |\omega_{mpnq}^{(rs)}(f, x, \alpha_m, \beta_n)|.$$

Тогда учитывая результаты первого пункта, можно утверждать справедливость следующих теорем.

Теорема 3. При $m, n \to \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$L_{mpnq}^{(rs)}(x, y, \alpha_m, \beta_n) = \frac{4 \ln\frac{m}{p+1} \ln\frac{n}{q+1}}{uv\pi^2} \left| \cos^r \frac{2m+1}{2}\alpha_m \right| \times$$

$$\times \left| \cos^s \frac{2n+1}{2}\beta_n \right| \cos\left(\frac{2m+1}{2}x - \frac{\pi}{2u}\right) \cos\left(\frac{2n+1}{2}y - \frac{\pi}{2v}\right) \times$$

$$\times \operatorname{cosec}\frac{\pi}{2u} \operatorname{cosec}\frac{\pi}{2v} + O\left(\frac{\ln\frac{m}{p+1}}{u} \cos^{(r)}\frac{2m+1}{2}\alpha_m \times \right.$$

$$\left. \times \cos\left(\frac{2m+1}{2}x - \frac{\pi}{2u}\right) \operatorname{cosec}\frac{\pi}{2u}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{\ln\frac{n}{q+1}}{n} \cos^{(s)}\frac{2n+1}{2}\beta_n \cos\left(\frac{2n+1}{2}y - \frac{\pi}{2v}\right) \operatorname{cosec}\frac{\pi}{2v}\right),$$

Теорема 4. Для того, чтобы имело место равенство

$$\lim_{m, n \to \infty} \omega^{(rs)}_{mpnq}(f, x, y, \alpha_m, \beta_n) = f(x, y)$$

при неограниченных m/p и n/q для всех $f(x, y) \in \tilde{C}$ равномерно относительно x и y, необходимо и достаточно, чтобы

$$\alpha_m = \frac{2k\pi}{2m+1} + O\left(\frac{1}{m \sqrt[r]{\ln \frac{m}{p+1}}}\right),$$

$$\beta_n = \frac{2l\pi}{2n+1} + O\left(\frac{1}{n \sqrt[s]{\ln \frac{n}{q+1}}}\right),$$

где k и l принимают конечные нечетные значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Павловский. Изв. вузов, № 2 (1965).
2. Н. М. Павловский. Изв. вузов, № 4 (1966).

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Д. Б. ТОПОЛЯНСКИЙ и В. К. ЖУРАКОВА

В работе [1] обобщенным методом моментов решена краевая задача для обыкновенного линейного дифференциального уравнения. В предлагаемой статье этим методом решается краевая задача для линейного интегро-дифференциального уравнения. При предположении существования и единственности решения рассматриваемой задачи доказывается равномерная сходимость приближенного решения и его производных соответственно к точному решению и его производным*.

---

* В работе[2] дана оценка невязки в случае обобщенного проекционного метода для операторного уравнения с линейным, вообще говоря, неограниченным оператором.