Если в качестве исходного семейства (16) взять осевой пучок плоскостей, то ортогональные траектории этого пучка образуют поверхность вращения. Уравнения (17) могут быть использованы для отыскания конечных уравнений поверхностей вращения в эллиптическом пространстве.

В эллиптическом пространстве рассмотрены в качестве примера поверхности Монжа, для которых в качестве исходного семейства взято семейство касательных плоскостей к конической поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Бляшке. Дифференциальная геометрия. ОНТИ-НКТП, СССР, 1935.

2. В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей. Гостехиздат, М., 1941.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. М. АЛХИМОВА

1. Пусть W_q^r — класс функций $f(x, y)$ периода 2π по x и по y, имеющих обобщенные производные (по Соболеву) до $2r$-го порядка, обладающие тем свойством, что функция

$$\Delta^r f = \Delta(\Delta^{r-1} f) = \varphi(x, y),$$

где

$$\Delta^r f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^r f, \quad r = 1, 2, 3, \ldots,$$

суммируема в q-й степени

$$(1 \leqslant q < \infty) \text{ и } \|\varphi\|_q = \left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(x, y)|^q \, dx\, dy\right\}^{1/q} \leqslant 1.$$

Из периодичности $f(x, y)$ вытекает периодичность функции $\varphi(x, y)$ по обеим переменным и выполнение равенства

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x, y)\, dx dy = 0. \tag{1}$$

Как показано в [1] функция $f(x, y) \in W_q^r$ имеет следующее интегральное представление

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K^{(r)}(u-x, v-y)\, \varphi(u, v)\, du dv + \frac{a_{00}}{4},$$

где $$K^{(r)}(u, v) = \sum_{s=0}^{\infty} {\sum_{l=0}^{\infty}}' (-1)^r \lambda_{sl} \frac{1}{(s^2+l^2)^r} \cos su \cos lv,$$

$$\lambda_{sl} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{при } s=0,\ l=0 \\ \frac{1}{2} & \text{при } \begin{cases} s=0,\ l \neq 0,\ l \geqslant 1 \\ l=0,\ s \neq 0,\ s \geqslant 1 \end{cases} \\ 1 & \text{при } s \geqslant 1,\ l \geqslant 1, \end{cases}$$

$$a_{00} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u, v)\, du dv.$$

Штрих в сумме означает отсутствие члена с индексами $s = l = 0$.

Рассмотрим кубатурную формулу

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) dx dy \approx L(f) = \frac{\pi^2}{nm} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2m} f\left(\frac{k\pi}{m}, \frac{i\pi}{n}\right). \tag{2}$$

Пусть $R(f) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y)\, dx dy - L(f)$ погрешность кубатурной формулы (2).

Учитывая (1) и точность кубатурной формулы (2) для константы, имеем для любой функции $f(x, y) \in W_q^r$

$$R(f) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[C - \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2m} \frac{\pi^2}{nm} K^{(r)}\left(u - \frac{k\pi}{m}, v - \frac{i\pi}{n}\right)\right] \times$$
$$\times \varphi(u, v)\, du dv,$$

где C — произвольная постоянная величина.

Отсюда

$$|R(f)| \leqslant \frac{1}{\pi^2} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| C - \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2m} \frac{\pi^2}{nm} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times K^{(r)}\left(u - \frac{k\pi}{m}, v - \frac{i\pi}{n}\right)\right|^p du dv \right\}^{1/p} \tag{3}$$

и так как C здесь может иметь произвольное значение, то будет верной также оценка

$$|R(f)| \leqslant \frac{1}{\pi^2}\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|C^* + (-1)^{r+1}\frac{\pi^2}{nm}\sum_{i=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2m}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}{}' \lambda_{sl}\frac{\cos s\left(u-\frac{k\pi}{m}\right)\cos l\left(v-\frac{i\pi}{n}\right)}{(s^2+l^2)^r}\right|^p du dv\right\}^{1/p} \qquad (4)$$

где C^* есть значение C, для которого интеграл

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|C-\sum_{i=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2m}\frac{\pi^2}{nm}K^{(r)}\left(u-\frac{k\pi}{m},\quad v-\frac{i\pi}{n}\right)\right|^p du dv$$

достигает наименьшего значения.

Несложные преобразования дают

$$\sum_{i=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2m}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}{}' \lambda_{sl}\frac{\cos s\left(u-\frac{k\pi}{m}\right)\cos l\left(v-\frac{i\pi}{n}\right)}{(s^2+l^2)^r} =$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_{2m\nu,\,2n\mu}}{[(2m\nu)^2+(2n\mu)^2]^r}4nm\cos 2n\mu v\cos 2m\nu u. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) получаем

$$|R(f)| \leqslant \frac{1}{\pi^2}\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|C^* + (-1)^{r+1}4\pi^2\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_{2m\nu,\,2n\mu}}{[(2m\nu)^2+(2n\mu)^2]^r}\cos 2n\mu v\cos 2m\nu u\right|^p du dv\right\}^{1/p}. \qquad (6)$$

Так как правая часть (6) от $f(x, y)$ не зависит, то

$$\sup_{f\in W_q^r}|R(f)| \leqslant \frac{1}{\pi^2}\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|C^* + (-1)^{r+1}4\pi^2\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}{}'\frac{\lambda_{2m\nu,\,2n\mu}}{[(2m\nu)^2+(2n\mu)^2]^r}\cos 2n\mu v\cos 2m\nu u\right|^p du dv\right\}^{1/p} =$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|D^{(r)}(u, v)|^p du dv\right\}^{1/p}. \qquad (7)$$

Нетрудно проверить, что для функции

$$f_0(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K^{(r)}(u-x, v-y)\, \varphi_0(u, v)\, du dv + \frac{a_{00}}{4}:$$

где

$$\varphi_0(x, y) = \left[\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |D^{(r)}(u, v)|^p du dv \right]^{-1/q} |D^{(r)}(x, y)|^{p/q} \operatorname{sign} D^{(r)}(x, y),$$

принадлежащей рассматриваемому классу, значение остатка $R(f_0)$ совпадает с правой частью (7).

Таким образом, установлена

Теорема 1. Какова бы ни была функция $f(x, y) \in W_q^r$ для ошибки приближения при помощи кубатурной формулы (2) имеет место оценка

$$\sup_{f \in W_q^r} |R(f)| = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| C^* + (-1)^{r+1} 4\pi^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} {\sum_{\mu=0}^{\infty}}' \frac{\lambda_{2m\nu, 2n\mu}}{[(2m\nu)^2 + (2n\mu)^2]^r} \cos 2n\mu v \cos 2m\nu u \right|^p du dv \right\}^{1/p}.$$

Примечание. Легко проверить, что при $p = q = 2$ $C^* = 0$ и

$$\sup_{f \in W_2^r} |R(f)| = 4\pi \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} {\sum_{\mu=0}^{\infty}}' \frac{\lambda^2_{2m\nu, 2n\mu}}{[(2m\nu)^2 + (2n\mu)^2]^{2r}} \right\}^{1/2}.$$

2. Обозначим через $\widetilde{W}_q^r$ класс функций $\widetilde{f}(x, y)$, сопряженных функциям класса W_q^r.

Для этого класса функций $\widetilde{f}(x, y)$, аналогично предыдущему, устанавливается

Теорема 2. Какова бы ни была функция $\widetilde{f}(x, y) \in \widetilde{W}_q^r$ для ошибки приближения при помощи кубатурной формулы

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{f}(x, y)\, dx dy \approx L(\widetilde{f}) = \frac{\pi^2}{nm} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2m} \widetilde{f}\left(\frac{k\pi}{m}, \frac{i\pi}{n}\right)$$

имеет место оценка

$$\sup_{\widetilde{f} \in \widetilde{W}_q^r} |R(\widetilde{f})| = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| C^* + (-1)^{r+1} 4\pi^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} {\sum_{\mu=0}^{\infty}}' \frac{\lambda_{2m\nu, 2n\mu}}{[(2m\nu)^2 + (2n\mu)^2]^r} \sin 2n\mu v \sin 2m\nu u \right|^p du dv \right\}^{1/p}.$$

Примечание. При $p=q=2$ $C^*=0$ и

$$\sup_{\tilde{f}\in \tilde{W}_q^r} |R(\tilde{f})| = 4\pi \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda^2_{2m\nu,\, 2n\mu}}{[(2m\nu)^2 + (2n\mu)^2]^{2r}} \right\}^{1/2};$$

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Я. С. Бугров. Приближение тригонометрическими полиномами классов функций, определяемых полигармоническим оператором. УМН, том XIII, выпуск 2(80), 1958.

[2]. В. И. Крылов. Приближенное вычисление интегралов. 1967.