УДК 517.51

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В.Ф.Бабенко, А.Ю.Громов

1. Пусть C – пространство непрерывных ограниченных на всей действительной оси функций с нормой $\|f\|_C = \sup\limits_{-\infty<t<+\infty} |f(t)|$;

$$C_0 = \left\{ f \in C: \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0 \right\};$$

L_1 – пространство суммируемых на всей действительной оси функций с нормой $\|f\|_L = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$;

W^rH^ω – множество функций из C таких, что модуль непрерывности $\omega(f^{(r)}, t) < \omega(t)$, где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности;

$$W^rH_0^\omega = W^rH^\omega \cap C_0;$$

B_σ – множество ограниченных на всей оси целых функций экспоненциального типа $\leq \sigma$ ([1], с. 174).

Обозначим

$$A_\sigma(f)_C = \inf_{B\in B_\sigma} \|f - B\|_C .$$

Если $\mathfrak{M}$ есть W^rH^ω или $W^rH_0^\omega$, то

$$A_\sigma(\mathfrak{M})_C = \sup_{f\in\mathfrak{M}} A_\sigma(f)_C .$$

Нам понадобятся еще такие обозначения:

$B_\sigma^\perp$ – множество функций из L_1 и ортогональных B_σ;

$\mathcal{S}$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций, таких, что

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left| x^\alpha \frac{d^\beta \varphi}{dx^\beta}(x) \right| < \infty$$

для любых натуральных α и β.

Если $\omega(t) = Kt$, то вместо W^rH^ω и $W^rH_0^\omega$ будем писать соответственно W^rH и W^rH_0.

Верхнюю грань наилучших приближений тригонометрическими полиномами на классе $W^{(r-1)}H^1$ периодических функций нашли Ж.Фавар, Н.И.Ахиезер и М.Г.Крейн(см.,напр.[1]). Величину $A_\sigma(W^{r-1}H^1)$ вычислил М.Г.Крейн (см.,напр.,[1]). Н.П.Корнейчук (см.,напр., [2]) нашел верхнюю грань наилучших приближений тригонометрическими полиномами на классах W^rH^ω ($\omega(t)$- произвольный выпуклый вверх модуль непрерывности) периодических функций.В.К.Дзядык [3] и А.Ю.Громов [4]нашли независимо $A_\sigma(H^\omega)$.

В настоящей работе при условии, что $\omega(t)$ - выпуклый вверх модуль непрерывности, мы найдем точное значение величины $A_\sigma(W^rH_0^\omega)$ для $\sigma>0$ и $r=1,2,\ldots$.

Отметим, что решение задачи для величины $A_\sigma(W^rH^\omega)$ было анонсировано Т.Н.Тугуши в Тезисах международной конференции по теории приближения функций (Калуга,1975г ,с.109), однако в своем докладе на этой конференции Т.Н.Тугуши сообщил, что может получить точный результат только в случае $r=1$. Какие-либо публикации с доказательством этого результата авторам не известны.

Нами доказана следующая теорема.

Теорема I. Каков бы ни был выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega(t)$,имеют место соотношения

$$A_\sigma(W^rH_0^\omega)_C=\frac{1}{\sigma^{r+1}}\int_0^\pi \Phi_{\pi,r}(t)\,\omega'(t/\sigma)\,dt,\ \sigma>0,\ r=1,2,\ldots .$$

Приведем схему доказательства.

Ввиду соотношений двойственности (см.напр.,[2] с.34)

$$A_\sigma(W^rH_0^\omega)=\sup_{f\in W^rH_0^\omega}\ \sup_{\substack{\psi\in B_\sigma^1\\ \|\psi\|_1=1}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\psi(t)\,dt \qquad (1)$$

Имеют место следующие леммы:

Лемма I. Пусть $f\in B_\sigma^1$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует функция $g\in B_\sigma^1\cap\varphi$, зависящая от ε , такая,что $\|f-g\|_1<\varepsilon$.

Лемма 2. Пусть $\varphi \in W^s B_\sigma^1 \cap \mathcal{S}$. Тогда существует неопределенный интеграл φ_1 от функции φ такой, что $\varphi_1 \in W^{s+1} B_\sigma^1 \cap \mathcal{S}$, $s=0,1,2\ldots$

Используя соотношения (I), леммы I и 2 и интегрируя по частям, получим

$$A_\sigma(W^r H_0^\omega) = \sup_{\varphi \in W^r B_\sigma^1 \cap \mathcal{S}} \sup_{f \in H_0^\omega} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) f(t)\, dt .$$

Рассуждения, аналогичные предложенным Н.П. Корнейчуком ([2], гл.7), для оценки приближений классов $W^r H^\omega$ периодических функций тригонометрическими полиномами позволяют теперь доказать неравенство

$$A_\sigma(W^r H_0^\omega) \leq \frac{1}{\sigma^{r+1}} \int_0^{\pi} \Phi_{\pi,r}(t)\, \omega'(t/\sigma)\, dt, \quad \sigma>0,\ r=1,2,\ldots \quad (2)$$

Пусть $f_{\omega,0,\sigma}(x)$ – $\frac{2\pi}{\sigma}$ – периодическая нечетная функция, определенная на $[0,\pi/\sigma]$ равенствами

$$f_{\omega,0,\sigma}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega(2x), & x \in [0, \pi/2\sigma] \\ \frac{1}{2}\omega(2(\pi/\sigma - x)), & x \in [\pi/2\sigma, \pi/\sigma] \end{cases},$$

а $f_{\omega,r,\sigma}(x)$ – r-й $\frac{2\pi}{\sigma}$ – периодический интеграл со средним значением на периоде, равным нулю.

Для любого N и любого $E>0$ существует функция $\eta_{E,N} \in \mathcal{S}$ такая, что

$$\eta_{E,N}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-N, N], \\ 0, & x \notin [-N-3E, N+3E], \end{cases}$$

$$0 \leq \eta_{E,N} \leq 1,$$

и для любого $K \geq 1$ $|\eta_{E,N}^{(K)}(x)| \leq A_K E^{-K}$ (см., напр., [5] с. 16).

Положим

$$f_{E,N}(x) = f_{\omega,r,\sigma}(x) \cdot \eta_{E,N}(x).$$

Используя функции вида $f_{E,N}(x)$, можно доказать, что в (2) на самом деле имеет место знак равенства.

2. Ранее было доказано ([1], с. 19), что для любой $f \in L_1^{(r)}$

$$A_\sigma(f)_L \leq \frac{K_r}{2\sigma^r} \omega(f^{(r)}, \pi/\sigma)_L ,$$

где $r=1,3,5,\ldots$.

Теорема 2. Каково бы ни было нечетное число $r>0$, справедливы равенства

$$\sup_{\substack{f\in L^{(r)} \\ f\neq const}} \frac{\sigma^r A_\sigma(f)_L}{\omega(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma})_L} = \frac{K_r}{2}.$$

3. Повторяя доказательство аналогичного факта для приближения периодических функций тригонометрическими полиномами (см. теорему 7.7.1, [2], с.213), можно получить следующее утверждение:

Теорема 3. На классе H^ω, заданном выпуклым вверх модулем непрерывности $\omega(t)$, верхняя грань $A_\sigma(H^\omega)_C$ реализуется линейным оператором из C в B_σ тогда и только тогда, когда $\omega(t)$ линеен на $[0, \frac{\pi}{\sigma}]$.

Литература

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.
2. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближений. М., 1976.
3. Дзядик В.К. Про точнI верхнI гранI найкращих наближень на деяких класах неперервних функцIй, визначених на дIйснIй осI. -"ДАН УРСР", 1975, № 7. Сер. А.
4. Громов А.Ю. Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем приближении целыми функциями экспоненциального типа. - в сб.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск, ДГУ, 1975, с.210-211.
5. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., 1976.
6. Громов А.Ю. О точных константах приближений целыми функциями дифференцируемых функций. - в сб.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск, ДГУ, 1976, с. [illegible]