УДК 517.5

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ СРЕДНИХ КОРОВКИНА

В.Ф. Бабенко, С.А. Пичугов

Пусть $C_{2\pi}$ - пространство непрерывных на числовой прямой 2π - периодических функций f с нормой $\|f\| = \max_x |f(x)|$,

$\omega(f,t) = \sup_{|h|\le t} \|f(\cdot) - f(\cdot + h)\|$ - модуль непрерывности, а

$\omega_2(f,t) = \sup_{|h|\le t} \|f(\cdot - h) - 2f(\cdot) + f(\cdot + h)\|$ - модуль гладкости функции f; $\omega^*(f,t)$, $\omega_2^*(f,t)$ - выпуклые вверх оболочки функций $\omega(f,t)$ и $\omega_2(f,t)$ соответственно. Через $C^*_{2\pi}$ обозначим множество функций $f \in C_{2\pi}$ с выпуклым вверх модулем непрерывности, а через $C^{**}_{2\pi}$ - множество функций $f \in C_{2\pi}$ с выпуклым вверх модулем гладкости. Пусть, далее, $\mathcal{L}_n$ - множество линейных операторов, отображающих $C_{2\pi}$ во множество тригонометрических полиномов порядка не выше n ($n = 0,1,2,\ldots$). В [1] доказано, что

$$\inf_{\mathcal{L}\in\mathcal{L}_n} \sup_{f\in C^*_{2\pi}} \frac{\|f - \mathcal{L}(f)\|}{\omega(f,\pi/n+1)} = \inf_{\mathcal{L}\in\mathcal{L}_n} \sup_{f\in C_{2\pi}} \frac{\|f - \mathcal{L}(f)\|}{\omega^*(f,\pi/n+1)} = 1$$

и, если $\tilde{\mathcal{L}}_n$ - оператор П.П.Коровкина [2],

$$\tilde{\mathcal{L}}_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+2-k}{n+2}\cos\frac{k\pi}{n+2} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n+2}\,\frac{\sin\frac{k\pi}{n+2}}{n+2}\right)\cos kt\right]dt,$$

то для любой функции $f \in C_{2\pi}$

$$\|f - \tilde{\mathcal{L}}_n(f)\| \le \omega^*(f,\pi/n+1). \qquad (1)$$

Нами доказана

Теорема. Имеют место равенства

$$\inf_{\mathcal{L}\in\mathcal{L}_n} \sup_{f\in C^{**}_{2\pi}} \frac{\|f - \mathcal{L}(f)\|}{\omega_2(f,\pi/n+1)} = \inf_{\mathcal{L}\in\mathcal{L}_n} \sup_{f\in C_{2\pi}} \frac{\|f - \mathcal{L}(f)\|}{\omega_2^*(f,\pi/n+1)} = \frac{1}{2},$$

и для любой функции $f \in C_{2\pi}$

$$\|f - \mathcal{L}_n(f)\| \le \frac{1}{2}\,\omega_2^*(f, \pi/n+1). \qquad (2)$$

Замечание. Функция $f(x) = \sin x$ принадлежит $C^*_{2\pi}$ и не принадлежит $C^{**}_{2\pi}$. Для любого натурального n функция $\varphi_n(x)$ такая, что $\forall x$ $\varphi_n(x+2\pi) = \varphi(x)$, а $\forall x \in \left[-\frac{0,9\pi}{n+1}, 2\pi - \frac{0,9\pi}{n+1}\right]$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{n+1}{0,9\pi}x + 1, & -\frac{0,9\pi}{n+1} \le x \le 0, \\ -\frac{n+1}{0,9\pi}x + 1, & 0 < x \le \frac{0,9\pi}{n+1}, \\ \frac{n+1}{0,9\pi}x - 1, & \frac{0,9\pi}{n+1} < x \le \frac{1,8\pi}{n+1}, \\ 1, & \frac{1,8\pi}{n+1} < x \le \frac{1,9\pi}{n+1}, \\ \frac{n+1}{0,9}x - \frac{10}{9}, & \frac{1,9\pi}{n+1} < x \le \frac{2\pi}{n+1}, \\ \frac{10}{9}\cdot\frac{2\pi - \frac{0,9\pi}{n+1} - x}{2\pi - \frac{2,9\pi}{n+1}}, & \frac{2\pi}{n+1} < x < 2\pi - \frac{0,9\pi}{n+1} \end{cases}$$

принадлежит $C^{**}_{2\pi}$ и не принадлежит $C^*_{2\pi}$.

Из оценки (2), очевидно, следует оценка (I). Пример функций $\varphi_n(x)$ показывает, что оценка (2) лучше (I), так как $\frac{1}{2}\,\omega_2^*(\varphi_n, \pi/n+1) = 1 < 1 + \frac{1}{18} = \omega^*(\varphi_n, \pi/n+1)$.

Литература

I. Давидчик А.Н., Лигун А.А. К теореме Джексона. -"Матем.заметки", 1974, т.16, № 6, с. 681–690.

2. Коровкин П.П. Линейные операторы и теория приближений. М., Физматгиз, 1959.