УДК 517.5

Неравенства типа Джексона для рельефной и полиномиальной аппроксимации гармонических функций

В. Ф. Бабенко*, Д. А. Левченко**

* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. E-mail: babenko.vladislav@gmail.com

** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. E-mail: spline_2009@ukr.net

Установлені нові точні нерівності Джексона для рельефної та поліноміальної апроксимації деяких класів гармонічних у внутрішності одиничного круга функцій.

Ключові слова: найкраще наближення функції, модуль неперервності функції, гармонічна функція, нерівність Джексона.

Установлены новые точные неравенства Джексона для рельефной и полиномиальной аппроксимации некоторых классов гармонических во внутренности единичного круга функций.

Ключевые слова: наилучшее приближение функции, модуль непрерывности функции, гармоническая функция, неравенство Джексона.

New sharp Jackson type inequalities for ridge and polynomial approximation of some classes of functions harmonic inside unit disk are obtained.

Key words: best approximation, modulus of continuity, Jackson type inequalities, harmonic function, ridge approximation

Пусть X – нормированное пространство и F – некоторое его подмножество. Для $x \in X$ величина

$$E(x, F)_X = \inf_{y \in F} \|x - y\|_X$$

называется наилучшим приближением элемента x подмножеством F в метрике пространства X .

Важной задачей теории приближения является задача о нахождении точной константы в неравенствах Джексона. Пусть $C_{2\pi}$ – пространство непрерывных 2π -периодических функций со стандартной нормой, а $C_{2\pi}^r$, $r \in \mathbb{N}$ – пространство r раз непрерывно дифференцируемых функций $f \in C_{2\pi}$. Через $\omega(f, \delta)$ обозначим модуль непрерывности функции f

$$\omega(f, \delta) = \sup_{-\delta \leq x \leq \delta} \|f(\cdot + x) - f(\cdot)\|_{C_{2\pi}}.$$

Неравенства

$$E_n(f)_{C_{2\pi}} \leq \chi_n \omega\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

и

$$E_n(f)_{C_{2\pi}} \leq \chi_{n,r} \omega \left(f^{(r)}, \frac{1}{n} \right),$$

где $E_n(f)_{C_{2\pi}} = \inf_{T_n} \|f - T_n\|_{C_{2\pi}}$ — наилучшее равномерное приближение функции f тригонометрическими полиномами T_n порядка $n - 1$, для функций f из $C_{2\pi}$ и $C_{2\pi}^r$ соответственно, называются неравенствами Джексона. Константы χ_n и $\chi_{n,r}$ не зависят от функции f . В дальнейшем оказалось, что для 2π — периодических функций значение модуля непрерывности удобнее брать в точке $\frac{\pi}{n}$.

В этом направлении известно много результатов [2–7]. Отметим некоторые из них. Для любой функции $f \in C_{2\pi}$ и чисел $k, n = 1, 2, \dots$ справедливы неулучшаемые неравенства [3;4]

$$E_n(f)_{C_{2\pi}} < \omega \left(f, \frac{\pi}{n} \right), \quad (1)$$

$$E_n(f)_{C_{2\pi}} < \frac{k+1}{2} \omega \left(f, \frac{\pi}{kn} \right), \quad (2)$$

а для любой $f \in C_{2\pi}^r$ при $r = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ [6]

$$E_n(f)_{C_{2\pi}} \leq \frac{\mathcal{K}_r}{2n^r} \omega \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n} \right), \quad (3)$$

где $\mathcal{K}_r$ — константы Фавара.

В этой работе мы установим аналогичные неравенствам (1)–(2) оценки для рельефной аппроксимации функции, которая является решением задачи Дирихле в единичном круге.

Задача Дирихле в единичном круге $\mathbb{B}^2$

$$\mathbb{B}^2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1\}$$

— это задача о нахождении гармонической во внутренности $\mathbb{B}^2$ и непрерывной в круге $\overline{\mathbb{B}^2}$ функции $u(\cdot, \cdot)$ такой, что

$$\Delta u = 0, \quad u(\cos t, \sin t) = f(t). \quad (4)$$

Здесь f — это наперед заданная из $C_{2\pi}$ функция.

Равнораспределенной рельефной аппроксимацией функции $u(\cdot, \cdot)$ называется величина

$$E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} = \inf_{R \in W_n^{eq}} \|u - R\|_{C(\mathbb{B}^2)}.$$

Здесь W_n^{eq} — множество функций вида

$$R(x) = \sum_{j=1}^n W_j(x \cdot \theta_j),$$

где $W_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные функции одной действительной переменной (волновые профили), $x \cdot \theta_j = x_1 \cos \frac{\pi j}{n} + x_2 \sin \frac{\pi j}{n}$, а

$$\|u\|_{C(\mathbb{B}^2)} = \max_{x \in \mathbb{B}^2} |u(x)|.$$

Наряду с рельефной аппроксимацией мы будем рассматривать аппроксимацию алгебраическими многочленами двух переменных степени не выше $n - 1$. Пусть $\mathcal{P}_n$ — подпространство алгебраических многочленов

$$P_n(x_1, x_2) = \sum_{k,s \geq 0, k+s \leq n-1} \alpha_{ks} x_1^k x_2^s.$$

Обозначим через

$$\mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)} := E(u, \mathcal{P}_n)_{C(\mathbb{B}^2)}.$$

Несложно проверить, что множество W_n^{eq} рельефных функций содержит подпространство алгебраических полиномов

$$\mathcal{P}_n \subset W_n^{eq}.$$

Из этого включения немедленно следует оценка

$$E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \leq \mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)}.$$

Далее, обозначим через $\mathcal{H}_n$ — множество гармонических многочленов из $\mathcal{P}_n$. Пусть u — решение задачи (4) с граничной функцией f . Тогда, учитывая тот факт, что сужение любого гармонического полинома $P_n \in \mathcal{H}_n$ на единичную окружность $\mathbb{T} = \partial \mathbb{B}^2$ является тригонометрическим полиномом порядка не выше $n - 1$, а также принцип максимума для гармонических функций можно написать следующие равенства:

$$E(u, \mathcal{H}_n)_{C(\mathbb{B}^2)} = E(u, \mathcal{H}_n)_{C(\mathbb{T})} = E_n(f)_{C_{2\pi}}.$$

Из вышесказанного следуют следующие соотношения:

$$E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \leq \mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)} \leq E(u, \mathcal{H}_n)_{C(\mathbb{B}^2)} = E_n(f)_{C_{2\pi}}. \quad (5)$$

Соотношения (5) были использованы в работе [1] для получения некоторых точных результатов по рельефной и полиномиальной аппроксимации классов функций, гармонических в единичном круге. Следует отметить оценку снизу для рельефной аппроксимации, которая была получена в [1] из соотношения двойственности. Для функции u (решения задачи (4) с граничной функцией f) имеет место неравенство

$$E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \geq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f \left(\frac{(2k+1)\pi}{n} \right). \quad (6)$$

Отметим, что соотношения (5) вместе с неравенствами (1) и (2) позволяют написать следующие неравенства Джексона:

$$E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \leq \mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)} < \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right),$$

$$E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \leq \mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)} < \frac{k+1}{2} \omega\left(f, \frac{\pi}{kn}\right), \quad (k, n = 1, 2, \dots)$$

которые справедливы для любой функции u , являющейся решением задачи (4) с граничной функцией $f \in C_{2\pi}$. Вопрос о точности этих неравенств для рельефной аппроксимации остается открытым. А для полиномиальной аппроксимации нами доказана

Теорема 1. *Для любой функции u , являющейся решением задачи (4) с граничной функцией $f \in C_{2\pi}$ справедливы неулучшаемые неравенства*

$$\mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)} \leq \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right),$$

$$\mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)} < \frac{k+1}{2} \omega\left(f, \frac{\pi}{kn}\right) \quad (k, n = 1, 2, \dots).$$

Доказательство теоремы 1. Возьмем произвольную функцию $u(\cdot, \cdot)$, которая является решением задачи (4) с граничной функцией $f \in C_{2\pi}$ и произвольный полином $P_n \in \mathcal{P}_n$. Очевидно, что

$$\|u - P_n\|_{C(\mathbb{B}^2)} \geq \|u - P_n\|_{C(\mathbb{T})} = \max_{t \in [0, 2\pi]} |u(\cos t, \sin t) - P_n(\cos t, \sin t)|. \quad (7)$$

Поскольку полином $P_n(\cos t, \sin t)$ является некоторым тригонометрическим полиномом $T_n(t)$ порядка не выше $n - 1$, а $u(\cos t, \sin t) = f(t)$, то из (7) следует

$$\|u - P_n\|_{C(\mathbb{B}^2)} \geq \|f - T_n\|_{C_{2\pi}} \geq E_n(f)_{C_{2\pi}},$$

что вместе с (5) в силу произвольности полинома P_n дает равенство

$$\mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)} = E_n(f)_{C_{2\pi}}.$$

Тогда утверждение теоремы следует из неулучшаемых неравенств (1) и (2).

Для рельефной аппроксимации нам удалось установить следующий точный результат

Теорема 2. *Для любой функции u , являющейся решением задачи (4) с граничной функцией $f \in C_{2\pi}^r$ при $r = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ справедливо неулучшаемое неравенство*

$$E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \leq \mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)} \leq \frac{\mathcal{K}_r}{2n^r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right). \quad (8)$$

Доказательство теоремы 2. Соотношения (8) немедленно следует из (5) и (3).

Покажем, что константа в правой части (8) не может быть уменьшена. Пусть для заданных n и r функция φ_{nr} — (r) -ый интеграл от функции $\varphi_{n0}(x) = \text{sign} \sin x$ с периодом $\frac{2\pi}{n}$ и средним значением на периоде, равным нулю. Как известно

$$\|\varphi_{nr}\|_{C_{2\pi}} = (-1)^k \varphi_{nr} \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n.$$

Обозначим через $\varphi_{nr}^*(x) = \varphi_{nr} \left(x - \frac{\pi}{2n} \right)$. Тогда функция Стеклова для φ_{nr}^*

$$\varphi_{nr,h}^*(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \varphi_{nr}^*(x-t) dt$$

принадлежит $C_{2\pi}^r$. Из свойств функции Стеклова следует, что

$$\varphi_{nr,h}^* \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) = \varphi_{nr}^* \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) + \varepsilon_k(h) = (-1)^k \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} + \varepsilon_k(h), \quad k = 1, 2, \dots, 2n,$$

$$\|(\varphi_{nr,h}^*)^{(r)}\|_{C_{2\pi}} = \|\varphi_{n0}^*\|_{C_{2\pi}} + \varepsilon_{2n+1}(h) = 1 + \varepsilon_{2n+1}(h),$$

где $\varepsilon_k(h)$, $k = 1, 2, \dots, 2n+1$ бесконечно малые при $h \rightarrow 0$.

Пусть решением задачи (4) с функцией $\varphi_{nr,h}^*(t)$ в правой части является функция $u^*(\cdot, \cdot)$. Тогда для функций $f \not\equiv 0$ с учетом (6) будем иметь

$$\begin{aligned} \sup_{f \in C_{2\pi}^r} \frac{E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)}}{\omega(f^{(r)}, \frac{\pi}{n})} &\geq \sup_{f \in C_{2\pi}^r} \frac{E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)}}{2\|f^{(r)}\|_{C_{2\pi}}} \geq \frac{E(u^*, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)}}{2\|(\varphi_{nr,h}^*)^{(r)}\|_{C_{2\pi}}} \geq \\ &\geq \frac{\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \varphi_{nr,h}^* \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)}{2\|(\varphi_{nr,h}^*)^{(r)}\|_{C_{2\pi}}} = \frac{\frac{\mathcal{K}_r}{n^r} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \varepsilon_k(h)}{2(1 + \varepsilon_{2n+1}(h))} = \frac{\mathcal{K}_r}{2n^r} + \varepsilon(h), \end{aligned}$$

где $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и потому может быть опущена. Таким образом,

$$\sup_{f \in C_{2\pi}^r} \frac{E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)}}{\omega(f^{(r)}, \frac{\pi}{n})} \geq \frac{\mathcal{K}_r}{2n^r},$$

что и означает неулучшаемость оценки (8).

Библиографические ссылки

1. Бабенко В.Ф. Равнораспределенная рельефная аппроксимация некоторых классов гармонических функций/ В.Ф. Бабенко, Д.А. Левченко//, Укр. мат. журн., 2012. – Т.64, №10.– С.1427-1432.
2. Жук В.В. Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций/ В.В. Жук – // ДАН СССР. – 201 (1967).– С.263–266.

3. *Корнейчук Н.П.* Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций/ Н.П. Корнейчук // ДАН СССР 145 (1962).– С.514–515.
4. *Корнейчук Н.П.* О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций/ Н.П. Корнейчук // Матем. заметки, 32:5 (1982).– С.669–674
5. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи в теории приближения/ Н.П. Корнейчук – // М., 1976.– 320 с.
6. *Лигун А.А.* О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций/ А.А. Лигун// Матем. заметки 14, №1 (1973). – С.21–30.
7. *Черных Н.И.* О неравенстве Джексона в L_2 / Н.И. Черных// Труды МИАН 88 (1967), 71–74.

Надійшла до редколегії 11.05.2012