Сравнивая (8) и (9), получаем

$$\sup_{f\in W^r_{L_p}} \|e_n(f;x)\|_{C[0,1]} = \frac{|\Delta_n|^{r-1+\frac{1}{q}}}{\sqrt[q]{q(r-1)+1}\,(r-1)!\,2^r},$$

а также, что

$$\inf_{\Delta_n} \sup_{f\in W^r_{L_p}} \|e_n(f;x)\|_{C[0,1]} = \frac{1}{\sqrt[q]{q(r-1)+1}\,(r-1)!\,2^r n^{r-1+\frac{1}{q}}}.$$

Литература

1. Davis P.J. Interpolation and Approximation, Blaisdell, New York, 1963.

УДК 517.5

О ПОПЕРЕЧНИКАХ ОДНОГО КЛАССА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В.Г.Доронин, А.А.Лигун

Будем полагать $f_+(x)=\max\{f(x),0\}$, $f_-(x)=\max\{-f(x),0\}$. Обозначим через $W^rL^+_p$ $(r=1,2,\dots,\ 1\le p\le\infty)$ множество всех 2π - периодических функций $f(x)$, у которых $(r-1)$ -я производная $f^{(r-1)}(x)$ $(f^{(0)}=f)$ - абсолютно непрерывна и $\|f^{(r)}_+\|_p \le 1$; через T_{2n-1} - множество всех тригонометрических многочленов порядка $\le n-1$; через $\varphi_r(x)$ - r -й периодический интеграл в среднем равный нулю на периоде от функции $\varphi_0(x)=\operatorname{sign}\sin x$, и положим $\|\varphi_r\|_C=K_r$ $(r=1,2,\dots)$.

Пусть $E_{M_n}(\mathfrak{M})_1$ - наилучшее приближение класса $\mathfrak{M}$ n -мерным подпространством M_n в метрике L_1, а

$$d_n(\mathfrak{M})_1 = \inf_{M_n\subset L_1} E_{M_n}(\mathfrak{M})_1$$

- поперечник А.Н.Колмогорова класса $\mathfrak{M}$ [I].

В работе [2] доказано, что при всех $n,r=1,2,\ldots$ и $1\le p\le\infty$ справедливо соотношение

$$E_{T_{2n-1}}(W^rL_p^+)_1=n^{-r}\|\varphi_r-K_r\|_{p'}\qquad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right).$$

Отсюда следует, что

$$d_{2n-1}(W^rL_p^+)_1\le n^{-r}\|\varphi_r-K_r\|_{p'}.\tag{I}$$

Используя один прием оценки снизу поперечников, предложенный в работе [3], и неравенство (I), мы докажем следующее утверждение.

<u>Теорема</u>. Пусть $n,r=1,2,\ldots$, $1\le p\le\infty$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Тогда

$$d_{2n-1}(W^rL_p^+)_1=n^{-r}\|\varphi_r-K_r\|_{p'}.$$

Для доказательства этой теоремы нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

<u>Лемма I.</u> Для любой непрерывной функции $\varphi(t)$ имеет место равенство

$$\sup_{\|\psi_+\|_p\le1}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\psi(t)\,dt=\|\varphi-\min_t\varphi(t)\|_{p'}\qquad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right).\tag{2}$$

Обозначим через P_n – множество всех 2π – периодических функций $f(x)$, удовлетворяющих следующему требованию: Существуют точки $y_0\le y_1\le\ldots\le y_{2n}=y_0+2\pi$ такие, что на каждом из промежутков $[y_{i-1},y_i]$ (если $y_i=y_{i-1}$, то считаем, что $[y_{i-1},y_i]=\varnothing$) $f(x)=\varepsilon_i$, где $\varepsilon_i=\pm1$ $(i=1,2,\ldots n)$. Множество всех 2π – периодических функций $f(x)$ в среднем равных нулю на периоде и таких, что $f^{(r)}(x)\in P_n$, обозначим через $P_{n,r}$.

<u>Лемма 2.</u> Пусть M_{2n-1} – произвольное $(2n-1)$ – мерное подпространство пространства L_1, содержащее константы. Тогда существует функция $f_*(x)\in P_{n,r}$ такая, что $f_*^{(r)}(x)\perp M_{2n-1}$ и $\bigvee_0^{2\pi}(f_{*+})=\bigvee_0^{2\pi}f(*-)$.

Доказательство. Пусть подпространство M_{2n-1} натянуто на систему линейно-независимых функций $e_1=1, e_2, \dots e_{2n-1}$. Обозначим через S_{2n+1} сферу с центром в нуле радиуса $\sqrt{2\pi}$ в $(2n+1)$ - мерном евклидовом пространстве. Для любого вектора $\xi=(\xi_1, \dots \xi_{2n+1}) \in S_{2n+1}$ определим функцию $f_0(\xi, x)$ равенствами $f_0(\xi,x)=\operatorname{sign} \xi_k \quad (\eta_{k-1} \le x \le \eta_k,\ k=1,\dots 2n+1)$. где $\eta_k=\sum_{i=1}^{k} \xi_i^2$. Пусть $r=1,2,\dots$.
Определим функции $f_i(\xi,x)$ $(i=1,2,\dots r)$ следующим образом:

$$f_i(\xi,x)=\int_0^x f_{i-1}(\xi,t)dt-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^t f_{i-1}(\xi,u)du\,dt.$$

На сфере S_{2n+1} зададим непрерывное $2n$ - мерное векторное поле $\tau(\xi)=(\tau_1(\xi),\dots,\tau_{2n}(\xi))$, где

$$\tau_i(\xi)=\int_0^{2\pi} f_0(\xi,x)e_i(x)dx=\int_0^{2\pi} f_r^{(r)}(\xi,x)e_i(x)dx \quad (i=1,\dots,2n-1)$$

$$\tau_{2n}(\xi)=\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(f_{r+}(\xi))-\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(f_{r-}(\xi)).$$

Для любого вектора $\xi\in S_{2n+1}$, $\tau(-\xi)=-\tau(\xi)$. Поэтому по теореме Борсука [3] существует вектор $\xi_0\in S_{2n+1}$, для которого $\tau(\xi_0)=0$, то есть $\tau_i(\xi_0)=0$ $(i=1,\dots,2n)$.

Выбирая в качестве $f_*(x)$ функцию $f_r(\xi_0,x)$, получим утверждение леммы 2.

<u>Лемма 3</u>. Какова бы ни была функция $f(x)\in P_{n,r}$, удовлетворяющая условию $\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(f_+)=\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(f_-)$, справедливо неравенство

$$\|f-\min_t f(t)\|_q \ge n^{-r}\|\varphi_r-K_r\|_q \qquad (1\le q\le\infty).$$

Для доказательства леммы 3 нам потребуются следующие определения и результаты работы [4]. Функция $\varphi(x)$ называется простой, если она обращается в нуль вне некоторого интервала, называемого основным для $\varphi(x)$, и уравнение $|\varphi(x)|-y=0$ имеет ровно два корня при каждом y, $0<y<\max_x|\varphi(x)|$. Пусть $\mathfrak{D}$ обозначает класс функций из пространства L_1, имеющих в каждой точке односторонние пределы. В [4] показано, что всякая абсолютно непрерывная функция $g(x)$ из L_1 такая, что $g'(x)\in D$, представима в виде

$$g(x)=\sum_k \varphi_k(x)+d \qquad (x_0\le x\le x_0+2\pi),$$

где $|g(x_0)|=\min_x|g(x)|, d=g(x_0)$, а $\varphi_k(x)$ - простые функции с основными интервалами (α_k,β_k); причем, если

$$\Phi(g,x)=\sum_k \bar{\varphi}_k(x)+|d|,$$

то

$$\Phi(g,0)=\frac{1}{2}\bigvee_0^{2\pi}(g)+|d|=\frac{1}{2}\|g'\|_1+|d|. \tag{3}$$

В работе [3] доказано, что для любой функции $f(x)\in F_{n,r}$ имеют место неравенства

$$|\Phi'(f_\pm,x)|\le\frac{\|f'\|_1}{2\|\varphi_{n,r-1}\|_1}|\Phi'(\varphi_{n,r},x) \quad (x\in[0,\tfrac{\pi}{n}]), \tag{4}$$

где

$$\varphi_{n,r}(x)=n^{-r}\varphi_r(nx). \tag{5}$$

Так как $\bigvee_0^{2\pi}(f_+)=\bigvee_0^{2\pi}(f_-)=\frac{1}{2}\|f'\|_1$ и функции $f(x)$ и $\varphi_{n,r}(x)$ имеют нули на периоде, то в силу равенства (3)

$$\Phi(f_\pm,0)=\frac{1}{2}\bigvee_0^{2\pi}(f_\pm)=\frac{1}{4}\|f'\|_1$$

и

$$\Phi(\varphi_{n,r},0)=\frac{1}{2}\|\varphi_{n,r-1}\|.$$

Поэтому

$$\Phi(f_\pm,0)=\frac{\|f'\|_1}{2\|\varphi_{n,r-1}\|_1}\Phi(\varphi_{n,r},0).$$

Из последнего равенства и неравенства (4) следует, что для всех $x\in[0,\frac{\pi}{n}]$

$$\Phi(f_\pm,x)\geqslant\frac{\|f'\|_1}{2\|\varphi_{n,r-1}\|_1}\Phi(\varphi_{n,r},x).$$

Используя неравенство Штейна [5], легко доказать, что

$$\|f'\|_1 \geq \|\varphi_{n,r-1}\|_1 .$$

Следовательно, для всех $x \in [0, \frac{\pi}{n}]$

$$\Phi(f_\pm, x) \geq \frac{1}{2}\Phi(\varphi_{n,r}, x). \tag{6}$$

Имеем

$$\int_0^{nx} \overline{(\varphi_{n,r})_\pm(t)}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \Phi(\varphi_{n,r}, t)\,dt \leq \int_0^x \Phi(f_\pm, t)\,dt \leq \int_0^{nx} \overline{f_\pm(t)}\,dt .$$

Поэтому для любой функции $f(x) \in P_{n,r}$ такой, что $\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(f_+) = \overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(f_-)$

при всех $x \in [0, 2\pi]$, имеет место

$$\int_0^x \overline{(\varphi_{n,r})_\pm(t)}\,dt \leq \int_0^x \overline{f_\pm(t)}\,dt . \tag{7}$$

Отсюда

$$\|\psi - \min_t \psi(t)\|_q \leq \|g - \min_t g(t)\|_q \qquad (1 \leq q \leq \infty).$$

Из последнего утверждения и неравенства (7) следует утверждение леммы 3.

Доказательство теоремы. Пусть M_{2n-1} – произвольное, $(2n-1)$ – мерное подпространство пространства L_1. Если M_{2n-1} не содержит констант, то

$$E_{M_{2n-1}}(W^r L_p^+)_1 \geq \sup_\lambda E_{M_{2n-1}}(\lambda)_1 = \sup_\lambda \lambda E_{M_{2n-1}}(1)_1 = \infty .$$

Ввиду этого в дальнейшем будем рассматривать только подпространства M_{2n-1}, содержащие константы.

Положим $W^0 C = \{f \in C : \|f\|_\infty \leq 1\}$ и обозначим через $W^r C$ $(r = 1, 2, \dots)$ множество всех функций $f(x) \in C$, у которых $f^{(r)}(x) \in W^0 C$.

По теореме двойственности С.М.Никольского

$$E_{M_{2n-1}}(f) = \sup_{g \in W^0 C,\, g \perp M_{2n-1}} \int_0^{2\pi} f(t) g(t)\,dt .$$

Отсюда, полагая $g(t) = \varphi^{(r)}(t)$, с помощью интегрирования по частям получим

$$E_{M_{2n-1}}(W^rL_p^+)_1 = \sup_{\{\varphi\in W^rC,\ \varphi^{(r)}\perp M_{2n-1}\}}\ \sup_{\{\|\psi\|_p\le 1,\ \psi\perp const\}} \int_0^{2\pi}\psi(t)\varphi(t)\,dt,$$

что вместе с леммой I дает

$$E_{M_{2n-1}}(W^rL_p^+)_1 = \sup_{\{\varphi\in W^rC,\ \varphi^{(r)}\perp M_{2n-1}\}} \|\varphi-\min_t \varphi(t)\|_{p'}. \qquad (8)$$

Учитывая, что множество $P_{n,r}$ лежит в классе W^rC, и сопоставляя равенство (8) с утверждением лемм 2 и 3, убеждаемся в справедливости неравенства противоположного (I). Теорема доказана.

Литература

I. Колмогоров А.Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале. - "Уч.зап.МГУ .Математика", I939, вып.30, № 3, с.3-I3.

2. Лоронин В.Г., Лигун А.А. Точные значения верхних граней наилучших приближений классов $W_+^r L_\Phi$ в метрике L .- В сб.: Исслед. по соврем.пробл.суммир. и приближ. функций и их прил., I976, с.25-34.

3. Моторный В.П., Рубан В.И. Поперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций в пространстве L . - "Матем.заметки", I975, т.I7, № 4, с. 53I-543.

4. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. М., I976.

5. Stain E.M. Functions of exponential type, Ann. of Math., 65, 1957, 582-592.