УДК 517.5

ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ В СРЕДНЕМ КЛАССОВ W_L^r $(r=1,2)$

В.А.Кофанов.

Введем следующие пространства и классы заданных на отрезке $[-1,1]$ функций:

L – пространство интегрируемых по Лебегу функций с нормой
$$\|f\|_L=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx;$$

M – пространство измеримых, существенно ограниченных функций с нормой
$$\|f\|_M=\sup_{-1\le x\le 1}\mathrm{vrai}\,|f(x)|;$$

W_L^r – класс функций, $(r-1)$-я производная которых абсолютно непрерывна $(f^{(0)}=f)$, а $\|f^{(r)}\|_L\le 1$ $(r=1,2,\dots)$;

H_{n+2}^n – класс функций, ортогональных многочленам до n-ой степени, т.е. $\int_{-1}^{1}x^k f(x)dx=0$ $(k=0,1,\dots n)$, имеющих не более $n+2$ перемен знака и таких, что $|f(x)|=1$ для всех $x\in[-1,1]$;

$W^rH_{n+2}^n$ – класс функций, представимых в виде свертки
$$f(x)=\int_{-1}^{1}K_r(x-t)g(t)dt$$
функций $g\in H_{n+2}^n$ с ядром
$$K_r(u)=\begin{cases}u^{r-1}/(r-1)!, & u\ge 0,\\ 0, & u<0\end{cases}\quad (r=1,2,\dots).$$

Пусть $E_n(f)_L$ — наилучшее приближение функции f в метрике L алгебраическими многочленами степени не выше n, а
$$E_n(W_L^r)_L=\sup_{f\in W_L^r}E_n(f)_L.$$

Аналогично определяются соответствующие понятия $\widetilde{W}_L^r$, $\widetilde{E}_n(f)_L$ для 2π - периодических функций.

С.М.Никольский показал [I], что величины $E_n(W_L^r)_L$ и $\tilde{E}_n(\tilde{W}^r)_L$ асимптотически равны. Он же в более ранней работе [2] установил, что

$$\tilde{E}_n(\tilde{W}_L^r)_L = \frac{K_r}{n^r} \quad (r,n = 1,2,3,\dots),$$

где K_r – константы Фавара.

Вопрос о точном при каждом n значении величин $E_n(W_L^r)_L$ остается открытым при $r>2$.

Для r = I,2 имеет место

Теорема.

$$\forall n=1,2,3,\dots \quad E_n(W_L^r)_L = \| S_{n,r}\|_M \quad (r=1,2),$$

где $S_{n,r}(x)$ – свертка функции $S_{n,o}(t) = \operatorname{sign} \sin(n+2)\arccos t$ с ядром $K_r(x-t)$.

При доказательстве этой теоремы используется

Лемма.

$$\forall n,r = 1,2,3,\dots \quad E_n(W_L^r)_L = \sup_{\varphi\in W^r H_{n+2}^n} \|\varphi\|_M .$$

Непосредственно из теоремы вытекает

Следствие.

Для любой функции f с интегрируемой r-ой производной имеет место неравенство

$$E_n(f)_L \le \|S_{n,r}\|_M \cdot E_{n-r}(f^{(r)})_L , \quad (r=1,2; \; n=1,2,3,\dots).$$

Неравенство точное, т.е. $\forall \varepsilon>0 \;\; \exists f$ такая, что $f^{(r)}\in L$ и

$$E_n(f)_L > (\|S_{n,r}\|_M - \varepsilon)\cdot E_{n-r}(f^{(r)})_L$$

Замечание I.

При r = I,2 непосредственно проверяется, что

$$\|S_{n,r}\|_M < K_r/n^r .$$

В частности,

$$\|S_{n,1}\|_M = \begin{cases} \sin \dfrac{\pi}{2(n+2)}, & n - \text{нечётно}, \\ \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2(n+2)}, & n - \text{чётно}. \end{cases}$$

Замечание 2.

Наилучшее на классах W_L^r $(r=1,2,\dots)$ приближение алгебраическими многочленами в среднем реализуется линейным методом.

Литература

I. Никольский С.М. О наилучшем линейном методе приближения многочленами в среднем дифференцируемых функций. ДАН СССР 58, № 2 (1947), с.185-188.

2. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем.
-"Изв.АН СССР.Сер. 10",1946, с.207-256.

УДК 517.514

О ПРИБЛИЖЕНИИ В СИЛЬНОМ СМЫСЛЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

В.В.Липовик, Н.П.Хорошко

Пусть $C_{2\pi,2\pi}$ - пространство непрерывных 2π - периодических по x и y функций $f(x,y)$. Обозначим через H_{ω_1,ω_2} класс функций $f\in C_{2\pi,2\pi}$, частные модули непрерывности которых

$$\omega_1(f;t)=\sup_{y}\sup_{|x_1-x_2|\le t}|f(x_1,y)-f(x_2,y)|,$$

$$\omega_2(f;t)=\sup_{x}\sup_{|y_1-y_2|\le t}|f(x,y_1)-f(x,y_2)|$$

не превосходят соответственно заданных модулей непрерывности $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$. При $\omega_1(t)=t^{\alpha_1}$, $\omega_2(t)=t^{\alpha_2}$ $(0<\alpha_1,\alpha_2\le 1)$ будем писать $H^{\alpha_1\alpha_2}$. Если при некотором фиксированном $0<\gamma<1$ $t^{-\gamma}\omega_i(t)\to\infty$ $(i=1,2)$ монотонно при $t\to 0$, то соответствующий класс функций обозначим $H_{\tilde\omega_1,\tilde\omega_2}$. Отметим, что