УДК 517.5

О НАИЛУЧШЕМ ВЫБОРЕ УЗЛОВ ПРИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ ФУНКЦИЙ ЧЕТНЫМИ ЭРМИТОВЫМИ СПЛАЙНАМИ

А.Д.Малышева

Обозначим через C^m $(m=0,1,\dots;\ C^0=C)$ множество непрерывных функций, имеющих на отрезке $[a,b]$ m непрерывных производных, и через C^m_* - множество всех функций $f(x)\in C^m$, у которых $f^{(m)}(x)>0$.

Пусть $\Delta_n=\{a=x_{0,n}<x_{1,n}<\dots<x_{n,n}=b\}$ $(n\geq 1)$ - произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, $h_{k,n}=x_{k,n}-x_{k-1,n}$; $\bar{x}_{k,n}=(x_{k-1,n}+x_{k,n})/2$ $(1\leq k\leq n)$, $h_n=\max\limits_k h_{k,n}$. - Точки $x_{k,n}$ $(1\leq k\leq n)$ будем называть узлами.

Поставим в соответствие каждой функции $f(x)\in C^m$ функцию $S_{2m}(f,x)\in C^m$ $(m\geq 0)$, которая удовлетворяет условиям:

1) на каждом из промежутков $[x_{k-1,n},x_{k,n}]$ $(1\leq k\leq n)$ функция $S_{2m}(f,x)$ является алгебраическим многочленом степени не выше $2m$;

2) $S^{(\nu)}_{2m}(f,x_{k,n})=f^{(\nu)}(x_{k,n})$ $\quad(\nu=0,1,\dots m-1;\ k=0,1,\dots n)$;

3) $S_{2m}(f,\bar{x}_{k,n})=f(\bar{x}_{k,n})$ $\quad(k=1,2,\dots n)$.

Функции $S_{2m}(f,x)$ будем называть эрмитовыми сплайнами (см.[1],с.48). Эрмитовые сплайны нечетного порядка рассматривались в работах [2] - [4].

В [3] и [4] найдены точные значения отклонений эрмитовых сплайнов нечетной степени на некоторых классах функций и указан наилучший выбор узлов при приближении конкретных функций этими сплайнами. Рассмотрим аналогичные вопросы для четных эрмитовых сплайнов.

Пусть $u_+^\nu = \max\{u^\nu, 0\}$ $(\nu=0,1,\ldots)$, x - фиксированное число, $x_{k-1,n} \le x \le x_{k,n}$ и $P_{2m}(x,t)$ - полином степени $2m$ такой, что он интерполирует функцию $(t-x)_+^{2m}$ $(m+1)$ раз в точке $x_{k,n}$ и m раз в точке $x_{k-1,n}$; $P_{2m}(t)$ - полином степени $2m$, интерполирующий функцию $(t-\bar{x}_{k,n})_+^{2m}$ $(m+1)$ раз в точке $x_{k,n}$ и m раз в точке $x_{k-1,n}$. Обозначим

$$(t-x)_+^{2m} - P_{2m}(t,x) = \Delta_{2m}(x,t), \quad (t-\bar{x}_{k,n})_+^{2m} - P_{2m}(t) = \Delta_{2m}(t).$$

Выберем число $\lambda > 0$ чтобы

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} \Delta_{2m}(x, x_{k-1,n}) = \lambda \frac{\partial^m}{\partial t^m} \Delta_{2m}(x_{k-1,n}).$$

Это возможно, так как $\frac{\partial^m}{\partial t^m} \Delta_{2m}(x_{k-1,n}) \neq 0$. Положим теперь

$$\bar{\Delta}_{2m}(x,t) = \frac{1}{(2m)!}\left[(t-x)_+^{2m} - \lambda (t-\bar{x}_{k,n})_+^{2m}\right] - Q_{2m}(x,t),$$

где $Q_{2m}(x,t)$ - некоторый алгебраический полином степени не выше $2m$. В силу выбора числа λ

$$\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} \bar{\Delta}_{2m}(x, x_{k-1,n}) = \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} \bar{\Delta}_{2m}(x, x_{k,n}) = 0 \quad (\nu = 1,2,\ldots m). \quad (1)$$

Лемма 1. Пусть $\sigma(f,x) = f(x) - S_{2m}(f,x)$. Тогда для $f(x) \in C^{2m+1}$ и $x_{k-1,n} \le x \le x_{k,n}$ $(1 \le k \le n)$ справедливо равенство

$$\sigma(f,x) = -\int_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}} \bar{\Delta}_{2m}(x,t) \cdot f^{(2m+1)}(t)\,dt. \quad (2)$$

Доказательство. Интегрируя правую часть соотношения (2) по частям сначала $m+1$ раз с учетом равенства (1) при $\nu = 0,1,\ldots,m$, потом $m-1$ раз, учитывая условия 2 при $\nu = m-1,\ldots,1$, получим левую часть (2).

Лемма 2. Для $x_{k-1,n} \le x \le x_{k,n}$ и $f(x) \in C^{2m+1}$ справедливо

$$|\sigma(f,x)| = \frac{1}{(2m+1)!}\left|f^{(2m+1)}(\xi_{k,n})\right|(x-x_{k-1,n})^m (x_{k,n}-x)^m |x-\bar{x}_{k,n}|$$

$$(x_{k-1,n} \le \xi_{k,n} \le x_{k,n})$$

Пусть W^rC $(r=0,1,\dots)$ — множество всех непрерывных на $[a,b]$ вместе с r-й производной функций $f(x)$ таких, что

$$\|f\|_C = \max_{a\le x\le b} |f(x)| \le 1.$$

Теорема I. Справедливы соотношения:

$$\sup_{f\in W^{2m+1}C} \|\sigma(f)\|_C = B_m \cdot h_n^{2m+1},$$

где

$$B_m = \left(1-(2m+1)^{-1}\right)^m \left[4^m (2m+1)!\sqrt{1+2m}\right]^{-1}, \tag{3}$$

и

$$\sup_{f\in W^{2m+1}C} \|\sigma(f)\|_{L_p} = A_{m,p}^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n h_{k,n}^{2mp+p+1}\right)^{1/p} \quad (1\le p<\infty), \tag{4}$$

$$A_{m,p} = [(2m+1)!]^{-p}\, 2^{-2mp-p}\int_0^1 x^p(1-x^2)^{mp}\,dx.$$

Лемма 3. Пусть $f(x)\in C_*^{2m+1}$. Справедливы соотношения

$$\|\sigma(f)\|_C = B_m \cdot \max_{1\le k\le n}\left\{\left(\int_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}} \left(f^{(2m+1)}(x)\right)^{1/2m+1}dx\right)^{2m+1} + Q_k\,\omega\left(f^{(2m+1)}, h_n\right)\cdot h_{k,n}^{2m+1}\right\},$$

где $|Q_k|\le 1$ и B_m определены равенством (3);

$$\|\sigma(f)\|_{L_p}^p = A_{m,p}\left\{\sum_{k=1}^n\left(\int_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}}\left(f^{(2m+1)}(x)\right)^{\frac{p}{2mp+p+1}}\right)^{2mp+p+1} + Q_k\,\omega\left(f^{(2m+1)}, h_n\right)^p \cdot h_{k,n}^{2mp+p+1}\right\},$$

где $|Q_k|\le 1$, $A_{m,p}$ определены равенством (4), $1\le p<\infty$, а $\omega(\varphi,t) = \sup_{|x'-x''|\le t} |\varphi(x')-\varphi(x'')|$ — модуль непрерывности $\varphi(x)$.

Лемма 4. Если $f(x)\in C_*^{2m+1}$, $0<M_1\le f^{(2m+1)}(x)\le M_2$ для $a<x<b$, то

$$M_1 B_m h_n^{2m+1} \le \|\sigma(f)\|_C \le M_2 B_m h_n^{2m+1}$$

и

$$M_1^p A_{m,p}\sum_{k=1}^n h_{k,n}^{2mp+p+1} \le \|\sigma(f)\|_{L_p}^p \le M_2 A_{m,p}\sum_{k=1}^n h_{k,n}^{2mp+p+1},$$

где B_m и $A_{m,p}$ соответственно определены равенствами (3) и (4).

Лемма 5. Для любого $n \geq 1$ и $\alpha > 1$ при условии $c_k \geq 0$ и $\sum_{k=1}^{n} c_k = c$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^{\alpha} = c^{\alpha} n^{1-\alpha}; \qquad \max_{1 \leq k \leq n} c_k^{\alpha} = c^{\alpha} n^{-\alpha},$$

причем минимум правых частей достигается при $c_k = c \cdot n^{-1}$ $(1 \leq k \leq n)$.

Следствие I. Если $f(x) \in C_*^{2m+1}$ $(m \geq 0)$ и $0 < M_1 \leq f^{(2m+1)}(x) \leq M_2$, то

$$M_1 B_m \left(\frac{b-a}{n}\right)^{2m+1} \leq \inf_{\Delta_n} \|\sigma(f)\|_{C[a,b]} \leq M_2 B_m \left(\frac{b-a}{n}\right)^{2m+1}$$

и

$$M_1^{p} A_{m,p} \frac{(b-a)^{2mp+p+1}}{n^{2mp+p}} \leq \inf_{\Delta_n} \|\sigma(f)\|_{L_p[a,b]}^{p} \leq M_2^{p} A_{m,p} \frac{(b-a)^{2mp+p+1}}{n^{2mp+p}}.$$

Треугольную матрицу узлов $\{x_{k,n}^{*}\} = \Delta_n^{*}$ $(k=0,1,\dots n;\ n=1,2,\dots)$ будем называть асимптотически наилучшей для функции $f(x)$, если при $n \to \infty$ для нее имеет место асимптотическое равенство

$$\|\sigma(f)\|_{L_p} = (1+\bar{\bar{o}}(1)) \inf_{\Delta_n} \|\sigma(f)\|_{L_p},$$

где $1 \leq p \leq \infty$, $L_{\infty} = C_{[a,b]}$.

Из леммы 4 и следствия I вытекает

Следствие 2. Пусть $f(x) \in C_*^{2m+1}$, $n \to \infty$. Для асимптотически наилучшей матрицы узлов Δ_n^{*} $(n=1,2,\dots)$ справедливы соотношения: в пространстве $C_{[a,b]}$ $h_n^{*} = O(n^{-1})$, а в пространстве $L_p[a,b]$ $(1 \leq p < \infty)$

$$\sum_{k=1}^{n} (h_{k,n}^{*})^{2mp+p+1} = O(n^{-2mp-p}), \quad h_n^{*} = O\left(n^{-\frac{2mp+p}{2mp+p+1}}\right),$$

$$h_{k,n}^{*} = x_{k,n}^{*} - x_{k-1,n}^{*}; \quad h_n^{*} = \max_{k} h_{k,n}^{*}.$$

Следствие 3. Пусть $f(x) \in C_*^{2m+1}$, $n \to \infty$. Для асимптотически наилучшей матрицы узлов Δ_n^{*} справедливы соотношения: в пространстве $C_{[a,b]}$

$$\omega(f^{(2m+1)}, h_n^{*}) \cdot h_{k,n}^{*\,2m+1} = O(\omega(f^{2m+1}, n^{-1}) \cdot n^{-2m-1}),$$

в пространстве $L_p[a,b]$ $(1\le p<\infty)$

$$\omega\left((f^{(2m+1)})^p, h_n^*\right)\sum_{k=1}^{n}(h_{k,n}^*)^{2mp+p+1}=O\left(\omega\left((f^{(2m+1)})^p, n^{-\frac{2mp+p}{2mp+p+1}}\right)\cdot n^{-2mp-p}\right).$$

Справедливость этих утверждений следует из следствия 2.

Теорема 2. Пусть $f(x)\in C_*^{2m+1}$ $(m=0,1,\dots)$, $n\to\infty$, тогда

$$\inf_{\Delta_n}\|\sigma(f)\|_C=B_m\left\{\int_a^b\left(f^{(2m+1)}(x)\right)^{\frac{1}{2m+1}}dx\right\}^{2m+1}\cdot n^{-2m-1}+O\left(\omega\left(f^{(2m+1)}, n^{-1}\right)\cdot n^{-2m-1}\right),$$

где B_m определены равенством (3);

$$\inf_{\Delta_n}\|\sigma(f)\|_{L_p}=A_{m,p}^{1/p}\left\{\int_a^b\left(f^{(2m+1)}(x)\right)^{\frac{p}{2mp+p+1}}dx\right\}^{\frac{2mp+p+1}{p}}\cdot n^{-2m-1}+$$

$$+O\left(\omega\left((f^{(2m+1)})^p, n^{-\frac{2mp+p}{2mp+p+1}}\right)\right)\cdot n^{-2m-1},$$

где $A_{m,p}$ определены равенством (4), причем асимптотически наилучшее расположение узлов $x_{k,n}^*$ $(1\le k\le n)$ определяется соответственно из равенств

$$\int_a^{x_{k,n}^*}\left(f^{(2m+1)}(x)\right)^{\frac{1}{2m+1}}dx=\frac{k}{n}\int_a^b\left(f^{(2m+1)}(x)\right)^{\frac{1}{2m+1}}dx,$$

$$\int_a^{x_{k,n}^*}\left(f^{(2m+1)}(x)\right)^{\frac{p}{2mp+p+1}}dx=\frac{k}{n}\int_a^b\left(f^{(2m+1)}(x)\right)^{\frac{p}{2mp+p+1}}dx.$$

Доказательство теоремы 2 следует из сопоставления леммы 3 и следствий 2 и 3.

Литература

1. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М., "Наука", 1967.
2. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", 1972.
3. Великин В.Л. Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций. – "Изв. АН СССР. Сер. матем.", 1973, т.37, № 1, с.165–185.

4. Л и г у н А.А., С т о р ч а й В.Ф. О наилучшем выборе узлов при приближении сплайнами в метрике L_p .- "Доклады конференции по теории приближения функций" Калуга, 24-28 июля 1975г. - "Математ.заметки", 1976, т.20, № 4, с.615-622.

УДК 517.5

О МНОГОМЕРНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЖЕКСОНА

С.А.Пичугов

Пусть функции $f(x,y)$ - непрерывные и периодические по каждой переменной с периодом 2π ; π^2 - основной квадрат периодов, $T_{nm}(x,y)$ - тригонометрический полином со спектром в квадрате:

$$T_{nm}(x,y)=\sum_{k=-n+1}^{n-1}\sum_{l=-m+1}^{m-1} c_{kl}e^{i(kx+ly)}.$$

Норма всюду - чебышевская, т.е. $\|f\|=\max\limits_{x,y}|f(x,y)|$.

I. Определим частные модули непрерывности:

$$\omega_1(f,h)=\sup_{|t|\le h}\|f(x+t,y)-f(x,y)\|,$$

$$\omega_2(f,h)=\sup_{|t|\le h}\|f(x,y+t)-f(x,y)\|.$$

Пусть C^* - совокупность функций $f\in C$, у которых $\omega_1(f,h)$ и $\omega_2(f,h)$ - выпуклые вверх; $\mathcal{Z}_{nm}$ - множество линейных операторов, отображающих C в множество полиномов T_{nm} ; $\widetilde{\mathcal{Z}}_{nm}$ - множество положительных операторов из $\mathcal{Z}_{nm}$,

$$K_{nm}(C^*)=\inf_{U_{nm}\in\mathcal{Z}_{nm}}\ \sup_{f\in C^*}\frac{\|f-U_{nm}(f)\|}{\omega_1(f,\frac{\pi}{n})+\omega_2(f,\frac{\pi}{m})},$$

$$\widetilde{K}_{nm}(C^*)=\inf_{U_{nm}\in\widetilde{\mathcal{Z}}_{nm}}\ \sup_{f\in C^*}\frac{\|f-U_{nm}(f)\|}{\omega_1(f,\frac{\pi}{n})+\omega_2(f,\frac{\pi}{m})}.$$