УДК 517.5

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В МЕТРИКЕ L_p $(0<p<1)$

Л.Б.Ходак

Введем обозначения. Пусть $\|f\|_{p[-1,1]}=\left(\int_{-1}^{1}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, $\|\bar f\|_{p[-1,1]}=\left(\int_{-1}^{1}|f(x)|^p\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)^{\frac{1}{p}}$. $L_{p[-1,1]}$ (соответственно $\bar L_{p[-1,1]}$) – пространство измеримых интегрируемых в p-й степени (соответственно с весом $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$) на отрезке $[-1,1]$ функций при $0<p<1$.

Будем говорить, что $f(x)\in H_p^\alpha$ (соответственно A_p^α), где $0<p<1$, $0<\alpha<\frac{1}{p}$, если f интегрируема в p-й степени на отрезке $[-1,1]$, для которой при любом $0<h<1$ выполняется неравенство

$$\| f(x+h)-f(x)\|_{p[-1,1-h]}\leq h^\alpha$$

(соответственно неравенство

$$\left\|\frac{f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-f(x)}{(\sqrt{1-x^2}+|h|)^\alpha}\right\|_{p[-1,1]}\leq |h|^\alpha$$

при любом h $(|h|<1)$).

Отметим, что классы H_p^α (см. [2], [3]) и A_p^α для $0<\alpha\leq\frac{1}{p}$ являются невырожденными, так как, например, функция $f(x)=\operatorname{sign}x$ принадлежит классам $H_p^{\frac{1}{p}}$ и $A_p^{\frac{1}{p}}$.

В.И.Ивановым [1] и группой авторов Э.А.Стороженко, В.Г.Кротовым, П.О.Освальд [2], [3] независимо были получены прямые и обратные теоремы типа Джексона о приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в пространствах L_p $(0<p<1)$.

В случае $p\geq 1$, М.К.Потаповым [4] были введены классы A_p^α, для которых конструктивная характеристика через приближения алгебраическими полиномами оказалась аналогичной непрерывному случаю (см. [5], стр. 276).

В.П.Моторным [6] было показано, что классы A_p^α и H_p^α ($p\geq 1$, $0<\alpha<1$) различны, а также дана оценка порядка возрастания величины

$$\inf_{P_n}\left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^\alpha}\right\|_{L_p[-1,1]}, \tag{2}$$

где $f\in H_p^\alpha$.

Заметим, что и в случае $0<p<1$ классы H_p^α и A_p^α при $0<\alpha<\frac{1}{p}$ также различны. При доказательстве этого факта, в частности, используется нижеприведенная теорема 2.

Здесь для $0<p<1$ приведем без доказательства утверждения о конструктивной характеристике классов A_p^α $(0<\alpha<\frac{1}{p})$ и об оценке порядка возрастания величины (2), оказавшихся такими же, как и в случае $p\geq 1$.

<u>Теорема I.</u> Для того, чтобы $f\in A_p^\alpha$ $(0<p<1, 0<\alpha<\frac{1}{p})$, необходимо и достаточно, чтобы существовал алгебраический полином $P_n(x)$ порядка не выше n такой, что

$$\left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^\alpha}\right\|_{p[-1,1]}\leq\frac{C}{n^\alpha},$$

где C - константа, не зависящая от n и f.

Необходимость теоремы I можно показать, пользуясь промежуточным приближением в метрике L_p $(0<p<1)$ кусочно-постоянными функциями, которые использовались в метрике L_p $(p\geq 1)$ В.П.Моторным [7] и П.Л.Ульяновым [8]. Достаточность же теоремы I доказывается по известной схеме Бернштейна.

Приведем еще одну конструктивную характеристику классов A_p^α, выраженную через кусочно-постоянные функции.

Теорема 2. Для того, чтобы $f\in A_p^\alpha$ $(0<p<1,\ 0<\alpha<\frac{1}{p})$ необходимо и достаточно, чтобы существовала кусочно-постоянная функция $l_n(f,x)$, для которой выполняются следующие два условия:

$$1)\quad \left\| \frac{f(x)-l_n(f,x)}{(\sqrt{1-x^2}+1/n)^\alpha} \right\|_{p[-1,1]} \le \frac{C}{n^\alpha},$$

$$2)\quad \left\| \frac{l_n(x\sqrt{1-h_n^2}-h_n\sqrt{1-x^2})-l_n(x)}{(\sqrt{1-x^2}+1/n)^\alpha} \right\|_{p[-1,1]} \le \frac{C}{n^\alpha},\quad h_n=O(\tfrac{1}{n}),$$

где $l_n(f,x)=C_i$ для $x\in[-1+\frac{i-1}{n},-1+\frac{i}{n}]$, $i=1,2,\dots 2n$, а константа C не зависит от n и f.

Необходимость теоремы 2 следует из доказательства необходимости теоремы I, а достаточность доказывается по стандартной схеме.

Отметим, что теоремы I и 2 справедливы и в метрике $L_p[-1,1]$ $(0<p<1)$.

Воспользовавшись методом В.П.Моторного, приведенным в [6], можно показать следующую теорему.

Теорема 3. Для любой функции $f\in H_p^\alpha$ $(0<p<1,\ 0<\alpha<\frac{1}{p})$ найдется алгебраический полином $P_n(x)$ порядка не выше $(n-1)m$ такой, что для любого $n\ge 1$ выполняется неравенство

$$\left\| \frac{f(x)-P_n(x)}{(\sqrt{1-x^2}\ \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^\alpha} \right\|_{p[-1,1]} \le C\ln^{\frac{1}{p}} n,$$

где C не зависит от n и f, а m - фиксированное натуральное число.

Литература

1. Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории

приближения в метрике L_p для $0<p<1$. – "Мат.заметки," 1975, т.18, вып.5, с.641–658.

2. С т о р о ж е н к о Э.А., К р о т о в В.Г., О с в а л ь д П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p $(0<p<1)$. – "Мат.сборник", 1975, 98, № 3, с.395–415.

3. К р о т о в В.Г., О с в а л ь д П., С т о р о ж е н к о Э.А. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p $(0<p<1)$. –"ДАН СССР", 1976, 226, № 1 с. 44–47.

4. П о т а п о в М.К. О приближении непериодических функций алгебраическими многочленами. – "Вестн.МГУ. Сер.матем"., 1960, № 4, с.14–25.

5. Т и м а н А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960.

6. М о т о р н ы й В.П. Приближение функций алгебраическими многочленами в метрике L_p. – "Изв. АН СССР, Сер.матем 1971, 35, с.874–899.

7. М о т о р н ы й В.П. Приближение функций алгебраическими многочленами в метрике L_p. Диссертация, Днепропетровск, 1967.

8. У л ь я н о в П.Л. Вложение некоторых классов функций H_p^ω. – "Изв. АН СССР. Сер.матем.," 1968, 32, с.649–686.