УДК 517.5

К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

В.В.Шалаев

Пусть L_p $(1 \le p < \infty)$ – пространство измеримых 2π -периодических функций $f(t)$ с суммируемой p-й степенью, норма в котором определяется равенством:

$$\|f\|_{L_p} = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}},$$

а C – пространство непрерывных на всей оси 2π – периодических функций $f(t)$ с нормой $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$.

Под пространством X в дальнейшем мы будем понимать либо L_p, либо C.

Пусть

$$\omega_k(f;\, k\delta)_X = \max_{0 \le h \le \delta} \|\Delta_h^k f(t)\|_X ,$$

где $\Delta_h^k f(t)$ – конечная разность к-го порядка функции f в точке t с шагом h.

$E_n(f)_X = \inf_{T_{n-1}} \|f - T_{n-1}\|_X$ $(n = 1, 2, \dots)$ — наилучшее приближение функции $f \in X$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$. При каждом фиксированном $n = 1, 2, \dots$ мы будем рассматривать множество $Z_n = Z_n(X)$ линейных ограниченных операторов, отображающих X в множество тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$.

Пусть

$$D_{n,k}(X, a) = \sup_{\substack{f \in X \\ f \ne const}} \frac{E_n(f)_X}{\omega_k(f;\, \frac{a}{n})_X}, \qquad (1)$$

$$\overline{D_{n,k}}(X,a) = \inf_{L_n \in Z_n(X)} \sup_{\substack{f \in X \\ f \neq const}} \frac{\| f - L_n(f) \|_X}{\omega_k(f; \frac{a}{n})_X} . \qquad (2)$$

Первый точный результат, связанный с вычислением величины (I) получен Н.П.Корнейчуком [I], который доказал, что

$$\sup_{n \geq 1} D_{n,1}(C,\pi) = 1 .$$

Затем Н.И.Черных [2] доказал, что

$$D_{n,1}(L_2,\pi) = \overline{D_{n,1}}(L_2,\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

А.Н.Давидчик и А.А.Лигун [3] нашли, что $\overline{D_{n,1}}(C^*,\pi) = 1$, где C^* - множество функций из C у которых модуль непрерывности выпуклый вверх. В.Ф.Бабенко и А.С.Пичугов [4] доказали, что $\overline{D_{n,2}}(C^{**}, 2\pi) = \frac{1}{2}$, где C^{**} - множество функций из C, у которых модуль гладкости выпуклый вверх. Отметим также, что, как следует из результатов С.Б.Стечкина [5],

$$\overline{D_{n,1}}(C,\pi) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left| \int_0^{\pi/2} u \operatorname{ctg} ut \, du \right| dt \leq \frac{3}{2} .$$

В этой работе мы находим оценки величин (I) и (2) при $k=2$, которые оказываются неулучшаемыми при $X=C$.

Нам понадобится следующий результат:

Теорема I. (Фавар-Ахиезер-Крейн [6] стр.251). При каждом $n, r = 1, 2, \ldots$ существует линейный метод приближения $F_{n,r}(f)$ такой, что для всякой функции $f(t)$ r - раз дифференцируемой и такой, что $f^{(r)}(t) \in X$, имеет место неравенство

$$\| f - F_{n,r}(f) \|_X \leq K_r \cdot n^{-r} \| f^{(r)} \|_X ,$$

где K_r - константы Фавара и, в частности $K_1 = \frac{\pi}{2}$, $K_2 = \frac{\pi^2}{8}$

Пусть $f_{hh}(t)=\frac{1}{h^2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-h/2}^{h/2} f(u+v+t)\,du\,dt$ – вторая функция Стеклова для функции $f(t)\in X$.

<u>Теорема 2.</u> Имеет место неравенство $\overline{D_{n,2}}(X,\pi)\le 1$.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим линейный метод $A_n(f)=F_{n,2}(f_{hh})$. Пусть $f(t)\in X$.

$$\inf_{L_n\in Z_n(X)}\|f-L_n(f)\|_X\le\|f-A_n(f)\|_X\le\|f-f_{hh}\|_X+ \\ +\|f_{hh}-F_{n,2}(f_{hh})\|_X. \qquad (3)$$

Для оценки второго слогаемого в правой части неравенства (3) воспользуемся теоремой I. Так как f_{hh} – дважды дифференцируема и $f''_{hh}\in X$, то $\|f_{hh}-F_{n,2}(f_{hh})\|_X\le\frac{\pi^2}{8n^2}\|f''_{hh}\|_X$.

Известно ([6] с.226), что $\|f''_{hh}\|_X\le h^{-2}\omega_2(f;2h)_X$ и $\|f-f_{hh}\|_X\le\frac{1}{2}\omega_2(f;2h)_X$.

Следовательно, $\inf\limits_{L_n\in Z_n(X)}\|f-L_n(f)\|_X\le\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{8n^2h^2}\right)\omega_2(f;2h)_X$.

Откуда, при $h=\pi/2n$ получаем утверждение теоремы.

<u>Лемма.</u> При любом фиксированном $n=1,2,\dots$, каково бы ни было число $0<\varepsilon<1/2$, можно указать $\varphi\in C$, не равную тождественной постоянной и такую, что

$$E_n(\varphi)_C>\left(1-\frac{1}{2n}-\varepsilon\right)\omega_2\left(\varphi,\frac{\pi}{n}\right)_C.$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $0<\varepsilon<1/2$ задано. Положим $x_0=0$; $x_k=k\pi/n-(n-k)\beta$ $(k=1,2,\dots n)$, где число β удовлетворяет неравенствам $0<\beta<\frac{2\varepsilon}{n^2}$. Так как $x_1>0$ и $x_{k+1}-x_k=\frac{\pi}{n}+\beta$, то $0=x_0<x_1<\dots<x_n=\pi$.

Построим непрерывную с периодом 2π четную функцию $\varphi(x)$, определив ее на промежутке $[0,\pi]$ следующим образом: $\varphi(0)=0$, $\varphi(x)=1/2$, если $\beta/2\le x\le x_1-\beta/2$, $\varphi(x)$ линейна на промежутке $[0,\beta/2]$, $\varphi(x_k)=(-1)^{k+1}$ $(k=1,2,\dots n)$.

$\varphi(x)=(-1)^{k+1}/2$ на промежутках $[x_k-\pi/2n, x_k-\beta/2]$ $(k=1,2,\dots n)$ и $[x_k+\beta/2, x_k+\pi/2n]$ $(k=1,2,\dots n)$, $\varphi(x)$ линейна на промежутках $[x_k-\beta/2, x_k]$ $(k=1,2,\dots n)$, $[x_k, x_k+\beta/2]$ $(k=1,2,\dots n-1)$, $[x_{k-1}+\pi/2n, x_k-\pi/2n]$ $(k=2,3,\dots n)$.

Нетрудно проверить, что $\omega_2(\varphi;\pi/n)=1$.

Пусть $T_{n-1}(x)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n-1}\cos(k-1)x\right)=\frac{1}{n}\frac{\sin(n-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

Легко проверить, что $T_{n-1}(x_0)=1-\frac{1}{2n}$, $T_{n-1}(\frac{k\pi}{n})=(-1)^{k+1}/2n$.

В работе [I] указано, что

$$|T_{n-1}(x_k)-T_{n-1}(\tfrac{k\pi}{n})|<\frac{n-1}{2}(n-k)\beta<\varepsilon \quad (k=1,2,\dots n).$$

Следовательно,

$$\varphi(x_k)-T_{n-1}(x_k)=[\varphi(x_k)-T_{n-1}(\tfrac{k\pi}{n})]+[T_{n-1}(\tfrac{k\pi}{n})-T_{n-1}(x_k)]=$$
$$=(-1)^{k+1}(2n-1)/2n+\mu_k \quad (k=0,1,\dots n),$$ где

$0\le|\mu_k|<\varepsilon$. Учитывая четность $\varphi(x)$ и $T_{n-1}(x)$, видим, что разность $\varphi(x)-T_{n-1}(x)$ на периоде $(-\pi,\pi]$ в $2n$ точках принимает значения с последовательно чередующимися знаками и эти значения по абсолютной величине превосходят

$(2n-1)/2n-\varepsilon$. Поэтому, в силу теоремы Валле Пусена([7], с.83) $E_n(\varphi)_C>\frac{2n-1}{2n}-\varepsilon=(1-\frac{1}{2n}-\varepsilon)\omega_2(\varphi;\pi/n)_C$

и лемма доказана.

Из доказанной теоремы 2 и леммы, учитывая, что $D_{n,2}(C,\pi)\le\bar{D}_{n,2}(C,\pi)$, вытекает следующая теорема.

<u>Теорема 2.</u>

$$\sup_{n\ge1} D_{n,2}(C,\pi)=\sup_{n\ge1}\bar{D}_{n,2}(C,\pi)=1.$$

Литература

I. Корнейчук Н.П. Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем приближении непрерывных периодических функций.– „ДАН СССР," 1962, т.145, № 3.

2. Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2.–„Тр.Матем. ин-та АН СССР," 1967, 88.

3. Давидчик А.Н., Лигун А.А. К теореме Джексона.– „Матем. заметки," 1974, т. 16, № 4.

4. Бабенко В.Ф., Пичугов С.А. Об одном экстремальном свойстве средних Коровкина, см. настоящий сборник.

5. Стечкин С.Б. О приближении периодических функций суммами Фавара.–„Тр.Матем. ин-та АН СССР," 1971, 109.

6. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.

7. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960.

УДК 517.51

ОЦЕНКА ОТКЛОНЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ИМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ТИПА С.Н.БЕРНШТЕЙНА

Н.Я.Ященко

Пусть $f(x)$ – непрерывная 2π – периодическая функция и $x_k=\frac{k\pi}{n}$ ($k=0,\pm1,\pm2,\ldots$) – заданная система точек. Известно [I], что тригонометрический полином ($n-1$)- го порядка наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ в системе точек x_k имеет вид

$$T_n(f;x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f(x_k)D_n(x_k-x), \qquad (1)$$