Л и т е р а т у р а

I. К о р н е й ч у к Н.П. Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем приближении непрерывных периодических функций.– „ДАН СССР" 1962, т.145, № 3.

2. Ч е р н ы х Н.И. О неравенстве Джексона в L_2.–„Тр.Матем. ин-та АН СССР" 1967, 88.

3. Д а в и д ч и к А.Н., Л и г у н А.А. К теореме Джексона.– „Матем. заметки" 1974, т. 16, № 4.

4. Б а б е н к о В.Ф., П и ч у г о в С.А. Об одном экстремальном свойстве средних Коровкина, см. настоящий сборник.

5. С т е ч к и н С.Б. О приближении периодических функций суммами Фавара.–„Тр.Матем. ин-та АН СССР" 1971, 109.

6. А х и е з е р Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.

7. Т и м а н А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960.

УДК 517.51

ОЦЕНКА ОТКЛОНЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ 2π -ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ИМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ТИПА С.Н.БЕРНШТЕЙНА

Н.Я.Ященко

Пусть $f(x)$ – непрерывная 2π – периодическая функция и $x_k=\frac{k\pi}{n}$ ($k=0,\pm1,\pm2,\dots$) – заданная система точек. Известно [I], что тригонометрический полином ($n-1$)- го порядка наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ в системе точек x_k имеет вид

$$T_n(f;x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f(x_k)D_n(x_k-x), \tag{I}$$

где
$$D_n(t) = \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t \Big/ 2\sin\frac{t}{2}\ .$$

На базе полиномов (I) построим сумму $B_n(f;x)$, аналогичную сумме С.Н.Бернштейна (см. [2]), полагая
$$B_n(f;x)=\frac{1}{4}\left[T_n\left(f;x+\frac{\pi}{n}\right)+2T_n(f;x)+T_n\left(f;x-\frac{\pi}{n}\right)\right] ,$$
и установим оценку величины $|f(x)-B_n(f;x)|$ через модуль непрерывности $\omega(f,\delta)$ функции $f(x)$.

В интерполяционном случае аналогичный вопрос рассматривался в работе [3] .

<u>Теорема.</u> Для любой непрерывной 2π - периодической функции $f(x)$ имеет место неравенство
$$|B_n(f;x)-f(x)| < \frac{13}{3\pi}\,\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right).$$

<u>Доказательство.</u> Будем предполагать, что $0 \le x \le \frac{\pi}{n}$.
В случае, когда $\frac{m\pi}{n} \le x \le \frac{(m+1)\pi}{n}$ (m - любое целое число), доказательство будет аналогичным.

Учитывая, что
$$B_n(f;x)=\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n} f(x_k)\, r_n(x_k-x),$$
где
$$r_n(x_k-x)=D_n(x_{k-1}-x)+2D_n(x_k-x)+D_n(x_{k+1}-x),$$
и что
$$\sum_{k=1}^{2n} r_n(x_k-x)=4n,$$
получим
$$|B_n(f;x)-f(x)| \le \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}|f(x_k)-f(x)|\,|r_n(x_k-x)| \le$$
$$\le \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n}\omega\left(f,\frac{k\pi}{n}\right)|r_n(x_k-x)| +$$
$$+\frac{1}{4n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega\left(f,\frac{k+1}{n}\pi\right)|r_n(x_k+x)| \le$$

$$\leq \frac{\omega(f,\frac{\pi}{n})}{4n}\left\{\sum_{k=1}^{n} k\,|r_n(x_k-x)| + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,|r_n(x_k+x)|\right\}. \qquad (2)$$

Установим знак $r_n(x_k-x)$. Имеем

$$r_n(x_k-x) = \frac{(-1)^k}{2}\sin nx\left[\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(x_{k-1}-x) - 2\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(x_k-x) + \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(x_{k+1}-x)\right]$$

$$= -\frac{(-1)^k \sin nx \,\sin^2\frac{\pi}{2n}\,\cos\frac{1}{2}(x_k-x)}{\sin\frac{1}{2}(x_{k-1}-x)\,\sin\frac{1}{2}(x_k-x)\,\sin\frac{1}{2}(x_{k+1}-x)}.$$

Поэтому

$$\operatorname{sign} r_n(x_k-x) = \begin{cases} (-1)^k, & k=2,3,\dots,n; \\ (-1)^{k+1}, & k=1. \end{cases} \qquad (3)$$

Аналогично устанавливается, что

$$\operatorname{sign} r_n(x_k+x) = \begin{cases} (-1)^{k+1}, & k=1,2,\dots,n-1; \\ (-1)^k, & k=0. \end{cases} \qquad (4)$$

Учитывая (3) и (4), находим из (2)

$$|E_n(f;x)-f(x)| \leq \frac{\omega(f,\frac{\pi}{n})}{8n}\sin nx\left[5\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + 5\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(x_1-x) -\right.$$

$$-2\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(x_2-x) - 2\operatorname{ctg}(x_1+x) - (2n+1)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x_1-x) -$$

$$\left.-(2n+1)\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right] = \omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\cdot\varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{8n}\sin nx\left[5\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + 5\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(x_1-x) - 2\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(x_2-x) -\right.$$

$$\left.-2\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(x_1+x) - (2n+1)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x - (2n+1)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x_1-x)\right].$$

Так как функция $\varphi(x)$ на отрезке $[0, \pi/n]$ может достигать своего наибольшего значения лишь в точках $x=0$, $\pi/2n$, π/n и $\varphi(0)=\varphi(\pi/n)$, то

$$\varphi(x) \le \max\{\varphi(0), \varphi(\pi/2n)\}.$$

Но

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin nx}{8n} \cdot 5\,\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2} = \frac{5}{4},$$

$$\varphi(\pi/2n) = \frac{1}{4n}\left[5\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4n} - 2\,\mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{4n}\right] < \frac{13}{3\pi}.$$

Следовательно, $\varphi(x) < \frac{13}{3\pi}$. Теорема доказана.

Литература

1. Оловянишников В.М. Оценка остатка при приближении непрерывных периодических функций полиномами, наилучшими в заданной системе точек. - "ДАН СССР", 1950, т. 70, № 5, с. 761 - 764.

2. Бернштейн С.Н. Собрание сочинений. Т.2, М., Изд-во АН СССР, 1954, с. 137.

3. Ким О. О некоторых интерполяционных процессах С.Н.Бернштейна. „Acta mathematica Academiae Scientiarum hungaricae", 1973, т.24, № 3-4, с. 353.