УДК 517.512

СУММИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ МЕТОДОМ Г.Ф.ВОРОНОГО

Л.Г.Бойцун

I. Пусть функция $f(u)$ интегрируема на каждом конечном промежутке, $S(t)=\int_0^t f(u)du$, и пусть дана интегрируемая на каждом конечном промежутке функция $p(t)$ и $P(y)=\int_0^y p(t)dt$. Если

$$\lim_{y\to\infty} \tau(y)=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(y-u)S(u)du=I,$$

то говорят, что интеграл $\int_0^\infty f(u)du$ суммируется функциональным методом Г.Ф.Вороного к I, $(B,p(y))$ - суммируем к I.

Пусть $f(t)\subset L_{(-\infty,\infty)}$. Интеграл Фурье функции $f(t)$ есть

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(x-t)dt,$$

его сопряженный есть

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin u(t-x)dt.$$

Мы пишем

$$\varphi(x,t)=\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x),\quad \Phi(t)=\int_0^t|\varphi(u)|du,$$

$$\psi(x,t)=\psi(t)=f(x+t)-f(x-t),\quad \Psi(t)=\int_0^t|\psi(u)|du.$$

Автором[I] доказаны следующие теоремы.

<u>Теорема А.</u> Если

$$\Phi(t)=o\left(\frac{p(1/t)}{P(1/t)}\right),\quad \text{когда } t\to 0, \tag{I}$$

тогда интеграл Фурье в точке x суммируется $(B,p(y))$ методом к $f(x)$, где $p(y)$ - положительная, дифференцируемая, монотонно убывающая функция такая, что $P(y)\to\infty$, когда $y \to \infty$.

Теорема В. Если

$$\Psi(t) = o\left(\frac{\rho(1/t)}{P(1/t)}\right), \quad \text{когда } t \to 0, \quad (2)$$

тогда сопряженный интеграл Фурье суммируется (B, $\rho(y)$) методом к

$$\bar{g}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt$$

во всякой точке x , в которой последний интеграл существует, если функция $\rho(y)$ такая же, как в теореме А.

В настоящей статье доказано, что условие - $\rho(y)$ - монотонно убывающая функция может быть заменено более общим условием:

$$\int_0^y u\,|\rho'(u)|\,du = O(P(y)), \quad \text{когда } y \to \infty. \quad (3)$$

Если $\rho(y)$ - монотонная функция, тогда условие (3) эквивалентно

$$y\rho(y) = O(P(y)).$$

так как

$$\int_0^y u\rho'(u)\,du = u\rho(u)\Big|_0^y - \int_0^y \rho(u)\,du = y\rho(y) - P(y).$$

Если условие (3) имеет место, тогда

$$\Phi(t) = o(t), \quad \text{когда } t \to 0. \quad (I)$$

Доказывается следующая

Теорема I. Если $\rho(y)$ - положительная, дифференцируемая функция такая, что $P(y) \to \infty$, когда $y \to \infty$, (I), (3) имеют место, тогда интеграл Фурье функции $f(t) \in L(-\infty,\infty)$ суммируется (B, $\rho(y)$) методом к $f(x)$ в точке x .

Доказательство. Нам надо показать, что

$$\tau(y) - f(x) = \frac{1}{\pi P(y)}\int_0^y \rho(y-u)\,du \int_0^\infty \varphi(t)\,\frac{\sin ut}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi P(y)} \int_0^\infty t^{-1} \varphi(t)\,dt \int_0^y \rho(y-u) \sin ut\,du = \frac{1}{\pi P(y)} \left(\int_0^{1/y} + \int_{1/y}^\infty \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(I_1 + I_2 \right) = O(1), \quad \text{когда} \quad y \to \infty.$$

В силу условия (4)

$$|I_1| \le \frac{1}{P(y)} \int_0^{1/y} t^{-1} |\varphi(t)|\,dt \int_0^y \rho(y-u)\,ut\,du \le y \int_0^{1/y} |\varphi(t)|\,dt = O(1).$$

Рассмотрим

$$|L(y,t)| = \left| \int_0^y \rho(y-u) \sin ut\,du \right| \le \int_0^{1/t} \rho(u)\,du +$$

$$+ \left| \int_{1/t}^y \rho(u) \sin (y-u)t\,du \right| = L_1(t) + L_2(t,y).$$

Интегрируя по частям, имеем

$$|L_2(y,t)| \le t^{-1} \rho(1/t) + t^{-1} \rho(y) + t^{-1} \int_{t^{-1}}^y |\rho'(u)|\,du.$$

Следовательно,

$$|I_2| = \left| \frac{1}{P(y)} \int_{1/y}^\infty t^{-1} \varphi(t) L(y,t)\,dt \right| \le$$

$$\le \frac{1}{P(y)} \left\{ \int_{1/y}^\infty t^{-1} |\varphi(t)| L_1(t)\,dt + \int_{1/y}^\infty t^{-1} |\varphi(t)| L_2(y,t)\,dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{P(y)} \left(I_{21} + I_{22} \right),$$

где

$$I_{21} \le \int_{1/y}^\infty t^{-1} |\varphi(t)| P(t^{-1})\,dt \le y\,\Phi(y^{-1}) P(y) + \int_{1/y}^\infty t^{-2} \Phi(t) P(t^{-1})\,dt +$$

$$+\int_{1/y}^{\infty} t^{-3}\Phi(t)\rho(t^{-1})dt - o(P(y)) + O(1)\int_{1/y}^{\infty} t^{-2}\rho(t^{-1})dt + O(1)\int_{1/y}^{\infty} t^{-2}\rho(t^{-1})dt = o(P(y)),$$

$$I_{22} \leq \int_{1/y}^{\infty} t^{-1}|\varphi(t)|t^{-1}\rho(t^{-1})dt + \int_{1/y}^{\infty} t^{-1}|\varphi(t)|t^{-1}\rho(y)dt + \int_{1/y}^{\infty} t^{-2}|\varphi(t)|dt\int_{1/t}^{y}|\rho'(u)|du \leq$$

$$\leq A\int_{1/y}^{\infty} t^{-1}|\varphi(t)|P(t^{-1})dt + \rho(y)y^{2}\Phi(y^{-1}) + \rho(y)\int_{1/y}^{\infty} t^{-3}\Phi(t)dt +$$

$$+\left[t^{-2}\Phi(t)\int_{1/t}^{y}|\rho'(u)|du\right]\Bigg|_{1/y}^{\infty} + \int_{1/y}^{\infty} t^{-3}\Phi(t)dt\int_{1/t}^{y}|\rho'(u)|du + \int_{1/y}^{\infty} t^{-2}\Phi(t)t^{-2}|\rho'(t^{-1})|dt \leq$$

$$\leq AI_{21} + O(\rho(y)y) + O(yP(y)) + \int_{0}^{y}|\rho'(u)|du\int_{1/u}^{\infty} t^{-3}\Phi(t)dt + o\left(\int_{0}^{y}u|\rho'(u)|du\right) =$$

$$= o(P(y)) + o\left(\int_{0}^{y}u|\rho'(u)|du\right) = o(P(y))$$ в силу условия (3),

что завершает доказательство теоремы I.

<u>Теорема 2.</u> Если $\rho(y)$-функция, удовлетворяющая условию теоремы I, и условие (2) имеет место, тогда сопряженный интеграл Фурье функции $f(x)\in L_{(-\infty,\infty)}$ суммируется $(B,\rho(y))$ методом к

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt$$

во всякой точке x, в которой последний интеграл существует.

Л и т е р а т у р а

I. Б о й ц у н Л.Г. Некоторые вопросы из теории тригонометрических интегралов Фурье. - В сб.:Сборник трудов механико-математического факультета по заказам промышленности.Вып.I. Днепропетровск, ДГУ, 1971.