УДК 517.512

L - СУММИРУЕМОСТЬ РЯДА, СВЯЗАННОГО С РЯДОМ ФУРЬЕ

Е.М.Гельберг

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ суммируем логарифмическим методом или L - суммируем к числу S, если для $x \in (0,1)$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{\log(1-x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n} x^n = S,$$

где S_n - частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Пусть функция $f(t)$ интегрируема по Лебегу в $(-\pi,\pi)$ и 2π - периодична.

Ряд
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (1)$$

является ее рядом Фурье.

Рядом, полученный почленным дифференцированием ряда (1), является ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx). \qquad (2)$$

В этой работе метод L - суммируемости применен к ряду
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n(x)}{n}, \qquad (3)$$

где $S_n(x)$ - частичная сумма ряда (2).

Введем следующие обозначения:

$$\psi(t) = f(x+t) - f(x-t),$$

$$h(t) = \frac{\psi(t)}{4 \sin \frac{t}{2}}.$$

Теорема. Если в точке x

$$\int_0^t |h(u)|\,du = o(t),\quad t\to 0, \tag{4}$$

$$\int_t^{\pi} \frac{|h(u)|}{u}\,du = o(\log 1/t),\quad t\to 0 \tag{5}$$

и интеграл
$$\int_0^{\pi} h(t)\operatorname{cosec}\frac{t}{2}\,dt \tag{6}$$

существует (в смысле Коши), то ряд (3) в точке x суммируется L - методом.

При доказательстве теоремы используется

Лемма. (см. [3]). Пусть
$$h(n,t)=\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\sin\mu t}{\mu}.$$

Если условие (4) теоремы выполняется, то для того, чтобы существовал предел интеграла
$$\int_0^{\pi} h(t)\operatorname{cosec}\frac{t}{2}\,h(n,t)\,dt,$$
когда $n\to\infty$, необходимо и достаточно существование интеграла (5).

Доказательство теоремы. $S_k(x)$ представим в виде
$$S_k(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt.$$

Следовательно,
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k(x)}{k}=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{k}\right)dt=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}h(t)\operatorname{cosec}\frac{t}{2}\sin(n+1)t\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h(t)\operatorname{cosec}\frac{t}{2}\, h(n,t)\,dt+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(t)\cos\frac{t}{2}\,dt = I_1+I_2+I_3 .$$

В силу леммы I_2 имеет конечный предел, а I_3 есть постоянная величина.

Легко видеть, что

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h(t)\operatorname{cosec}\frac{t}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt+o(1).$$

Поэтому, для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{\pi\log(1-x)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\int_0^{\pi} h(t)\operatorname{cosec}\frac{t}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt<\infty. \quad (7)$$

$$\frac{1}{\pi\log(1-x)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\int_0^{\pi} h(t)\operatorname{cosec}\frac{t}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi\log(1-x)}\int_0^{\pi}\frac{h(t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sin t}{1-x\cos t}\,dt+o(1), \quad (8)$$

$$\frac{1}{\pi\log(1-x)}\int_0^{\pi}\frac{h(t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sin t}{1-x\cos t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi\log(1-x)}\left\{\int_0^{1-x}+\int_{1-x}^{\pi}\right\}\frac{h(t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sin t}{1-x\cos t}\,dt=L_1+L_2. \quad (9)$$

В силу условия (5) теоремы, получим

$$|L_1|\le\frac{1}{\pi\log(1-x)}\,O\left(\frac{x}{1-x}\right)\int_0^{1-x}|h(t)|\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi\log(1-x)}\,O\left(\frac{x}{1-x}\right)o\left((1-x)\log\frac{1}{1-x}\right)=o(1), \quad (10)$$

$$|L_2|\le O\left(\frac{1}{\log(1-x)}\right)\int_{1-x}^{\pi}\frac{|h(t)|}{t}\,dt=$$

$$=O\left(\frac{1}{\log(1-x)}\right)o\left(\log\frac{1}{1-x}\right)=o(1). \quad (11)$$

Из (8)-(II) следует (7). Теорема доказана.

Литература

1. V. P. Kataria. The summability (W, p_n) of a series associated with the derived series. Rend circoolo mat. di palermo, 1967, N16, p. 121-128.

2. O. P. Rai. On the strong (L) summability of the derived Fourier series. Proc. Japan Acad. 1966, 42, N3, p. 243-246.

3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., "Мир", 1965, т. I.

УДК 517.512.2.

АБСОЛЮТНАЯ И СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ В СТЕПЕНИ $p \geqslant 1$ РЯДОВ, СВЯЗАННЫХ С РЯДАМИ ФУРЬЕ, МАТРИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

Н. Т. Половина

Пусть $f(t)$ - 2π - периодическая функция, интегрируемая по Лебегу в $(-\pi, \pi)$ и пусть ей соответствует ряд Фурье-Лебега:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt. \tag{1}$$

Преобразуем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k}{k} F(k), \tag{2}$$