Из (8)-(II) следует (7). Теорема доказана.

Литература

1. V. P. Kataria. The summability (W, p_n) of a series associated with the derived series. Rend circoolo mat. di palarmo, 1967, N 16, p. 121-128.

2. O. P. Rai. On the strong (L) summability of the derived Fourier series. Proc. Japan Acad. 1966, 42, N 3, p. 243-246.

3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., "Мир", 1965, т. I.

УДК 517.512.2.

АБСОЛЮТНАЯ И СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ В СТЕПЕНИ $p \geq 1$ РЯДОВ, СВЯЗАННЫХ С РЯДАМИ ФУРЬЕ, МАТРИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

Н. Т. Половина

Пусть $f(t)$ – 2π – периодическая функция, интегрируемая по Лебегу в $(-\pi, \pi)$ и пусть ей соответствует ряд Фурье-Лебега:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt. \tag{I}$$

Преобразуем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k}{k} F(k), \tag{2}$$

где $S_k = S_k(x)$ – последовательность частичных сумм ряда (2), а $F(t)$ – положительная монотонно непоотолрастающая функция, с помощью $\gamma = \| \gamma_{nk} \|$ – матрицы [1].

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{nk} \frac{S_k}{k} F(k).$$

Ряд (2) $|\gamma|_p$ – и $[\gamma]_p$ – суммируем, $p \geq 1$, если, соответственно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1} |\sigma_n - \sigma_{n-1}|^p < \infty, \quad \sum_{k=1}^{n} k^p |\sigma_k - \sigma_{k-1}|^p = O(n), \; n \to \infty.$$

Здесь устанавливаются условия $|\gamma|_p$ – и $[\gamma]_p$ – суммируемости ряда (2) в точке.

Положим $\Delta \gamma_{nk} = \gamma_{nk} - \gamma_{n-1,k}$ и

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)], \qquad \Psi(t) = \Phi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Теорема 1. Пусть для γ – метода при $p > 1$ выполнено

$$1^\circ. \sum_{n=1}^{\infty} (n)^{\frac{p-1}{p}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \Delta \gamma_{nk} \frac{\sin \frac{k}{n}}{1} F(k) \right| < A F(\pi z).$$

Если при некотором x

$$\int_0^{\pi} \frac{|\Psi(t)|^p}{t^{p-1}} \left[F\left(\frac{\pi}{t}\right)\right]^p dt < \infty, \qquad \int_0^{\pi} \frac{|\Phi'(t)|^p}{t^{p-1}} \left[F\left(\frac{\pi}{t}\right)\right]^p dt < \infty,$$

то ряд (2) $|\gamma|_p$ – суммируем в точке $t = x$.

Доказательство. Известно, что

$$S_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(t) \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Psi(t) \sin kt \, dt -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi'(t) \frac{\sin kt}{k} dt$$

Следовательно,

$$\frac{S_k}{k}F(k)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\frac{\sin kt}{k}F(k)dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)\frac{\sin kt}{k^2}dt=\alpha_k-\beta_k.$$

Тогда

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{nk}\,\alpha_k+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{nk}\,\beta_k=\sigma_n^{(1)}+\sigma_n^{(2)}.$$

Если применить неравенство Гельдера при $p>1$

$$\sum_{n=1}^{N}n^{p-1}|\sigma_n^{(1)}-\sigma_{n-1}^{(1)}|^p<\sum_{n=1}^{N}\left[\int_{1/\pi}^{\infty}|\psi(\tfrac{1}{z})|z^{\frac{p-1}{p}}\left(\frac{n}{z}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\gamma_{nk}\frac{\sin\frac{k}{z}}{k}F(k)\right|\frac{dz}{z^2}\right]^p=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\left\{\int_{1/\pi}^{\infty}\left[\left(\frac{n}{z}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\gamma_{nk}\frac{\sin\frac{k}{z}}{k}F(k)\right|\frac{1}{z^2}\right]^{\frac{1}{p}}z^{\frac{p-1}{p}}|\psi(\tfrac{1}{z})|[F(\pi z)]^{\frac{p-1}{p}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(\frac{n}{z}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\gamma_{nk}\frac{\sin\frac{k}{z}}{k}F(k)\right|\frac{dz}{z^2F(\pi z)}\right]^{\frac{1}{q}}dz\right\}^p<$$

$$<\sum_{n=1}^{N}\int_{1/\pi}^{\infty}\left(\frac{n}{z}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\gamma_{nk}\frac{\sin\frac{k}{z}}{k}F(k)\right||\psi(\tfrac{1}{z})|^p[F(\pi z)]^{p-1}z^{p-3}\times$$

$$\times\left[\int_{1/\pi}^{\infty}\left(\frac{n}{z}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\gamma_{nk}\frac{\sin\frac{k}{z}}{k}F(k)\right|\frac{dz}{z^2F(\pi z)}\right]^{p/q}=$$

$$=O(1)\int_0^{\pi}\frac{|\psi(t)|^p}{t^{p-1}}\left[F\left(\frac{\pi}{t}\right)\right]^p dt=O(1). \qquad (3)$$

Аналогично покажем, что при $p>1$

$$\sum_{n=1}^{N}n^{p-1}|\sigma_n^{(2)}-\sigma_{n-1}^{(2)}|^p=O(1). \qquad (4)$$

Легко видеть, что неравенства (3) и (4) верны и при $p=1$.

В таком случае справедливость теоремы следует из неравенства

$$\sum_{n=1}^{N} n^{p-1}|\sigma_n - \sigma_{n-1}|^p \le \left\{\left[\sum_{n=1}^{N} n^{p-1}|\sigma_n^{(1)} - \sigma_{n-1}^{(1)}|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{n=1}^{N} n^{p-1}|\sigma_n^{(2)} - \sigma_{n-1}^{(2)}|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right\}^p.$$

<u>Теорема 2.</u> Пусть для γ - метода при $p \geq 1$

$$2^0 \quad \left(\frac{n}{z}\right)\left|\sum_{k=1}^{\infty} \Delta\gamma_{nk} \frac{\sin\frac{k}{z}}{k} F(k)\right| < AF(\pi z),$$

$$3^0 \quad \int_{1/\pi}^{\infty} z\,d\left[\left(\frac{n}{z}\right)\left|\sum_{k=1}^{\infty} \Delta\gamma_{nk} \frac{\sin\frac{k}{z}}{k} F(k)\right| \frac{1}{F(\pi z)}\right] = O(1);$$

4^0 для каждого конечного $\bar{y}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1/\pi}^{\bar{y}} z\,d\left[\left(\frac{n}{z}\right)\left|\sum_{k=1}^{\infty} \Delta\gamma_{nk} \frac{\sin\frac{k}{z}}{k} F(k)\right| \frac{1}{F(\pi z)}\right] = 0.$$

Если для некоторого x при $\omega \to \infty$

$$\int_{1/\omega}^{\pi} \frac{|\psi(t)|^p}{t^p}\left[F\left(\frac{\pi}{t}\right)\right]^p dt = o(\omega); \quad \int_{1/\omega}^{\pi} \frac{|\Phi'(t)|^p}{t^p}\left[F\left(\frac{\pi}{t}\right)\right]^p dt = o(\omega),$$

то ряд (2) $[\gamma]_p$ - суммируем в точке $t=x$.

<u>Доказательство.</u> Положим

$$\frac{1}{\omega}\int_{1/\omega}^{\pi} \frac{|\psi(t)|^p}{t^p}\left[F\left(\frac{\pi}{t}\right)\right]^p dt = F^{(p)}(\omega); \quad \frac{1}{\omega}\int_{1/\omega}^{\pi} \frac{|\Phi'(t)|^p}{t^p}\left[F\left(\frac{\pi}{t}\right)\right]^p dt = F_1^{(p)}(\omega).$$

Тогда

$$d\left[\omega \cdot F^{(p)}(\omega)\right] = \frac{\omega^p |\psi(\frac{1}{\omega})|^p [F(\pi\omega)]^p}{\omega^2} d\omega,$$

$$d\left[\omega \cdot F_1^{(p)}(\omega)\right] = \frac{\omega^p |\Phi'(\frac{1}{\omega})|^p [F(\pi\omega)]^p}{\omega^2} d\omega.$$

В таком случае при $p>1$.

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} n^p |\tilde{\sigma}_n^{(1)}-\tilde{\sigma}_{n-1}^{(1)}|^p <$$

$$<\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left\{\int_{1/\pi}^{\infty}\left(\frac{n}{z}\right)\left|\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\gamma_{nk}\,\frac{\sin\frac{k}{z}}{k}F(k)\right| z\,|\psi(\tfrac{1}{z})|\,\frac{dz}{z^2}\right\}^p <$$

$$<\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_{1/\pi}^{\infty}\left(\frac{n}{z}\right)\left|\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\gamma_{nk}\,\frac{\sin\frac{k}{z}}{k}F(k)\right|\frac{z^p|\psi(\frac{1}{z})|^p[F(\pi z)]^{p-1}}{z^2}\times$$

$$\times\left[\int_{1/\pi}^{\infty}\left(\frac{n}{z}\right)\left|\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\gamma_{nk}\,\frac{\sin\frac{k}{z}}{k}F(k)\right|\left[\frac{1}{z^2F(\pi z)}\right]^{p/q}dz\right]^{p/q} =$$

$$=\frac{O(1)}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_{1/\pi}^{\infty}\left(\frac{n}{z}\right)\left|\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\gamma_{nk}\,\frac{\sin\frac{k}{z}}{k}F(k)\right|\frac{1}{F(\pi z)}\,d[z\cdot F^{(p)}(z)]=$$

$$=\frac{O(1)}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_{1/\pi}^{\infty} z\,d\left[\left(\frac{n}{z}\right)\left|\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\gamma_{nk}\,\frac{\sin\frac{k}{z}}{k}F(k)\right|\frac{1}{F(\pi z)}\right]F^{(p)}(z)=\frac{O(1)}{N}\sum_{n=1}^{N}\Phi_n .$$

Так как $F^{(p)}(z)\to 0,\ z\to\infty$, а ядро

$$z\,d\left[\left(\frac{n}{z}\right)\left|\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\gamma_{nk}\,\frac{\sin\frac{k}{z}}{k}F(k)\right|\frac{1}{F(\pi z)}\right]$$

(в силу условий 3^0 и 4^0) является регулярным, то $\Phi_n\to 0$, $n\to\infty$ а, следовательно,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} n^p|\tilde{\sigma}_n^{(1)}-\tilde{\sigma}_{n-1}^{(1)}|^p=O(1),\ N\to\infty. \qquad (5)$$

Аналогично покажем, что

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} n^p|\tilde{\sigma}_n^{(2)}-\tilde{\sigma}_{n-1}^{(2)}|^p=O(1),\ N\to\infty. \qquad (6)$$

Легко видеть-неравенства (5) и (6) верны и при $p=1$. В таком случае справедливость теоремы следует из неравенства

$$\frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N} n^{p}|\sigma_n-\sigma_{n-1}|^{p}\right| \leq \left\{\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} n^{p}|\sigma_n^{(1)}-\sigma_{n-1}^{(1)}|^{p}\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} n^{p}|\sigma_n^{(2)}-\sigma_{n-1}^{(2)}|^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\right\}^{p}.$$

Литература

I. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., 1960.

УДК 517.512.2.

АБСОЛЮТНАЯ И СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ В СТЕПЕНИ $p\geq 1$ r - РАЗ ПРОДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО РЯДА ФУРЬЕ И r - РАЗ ПРОДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО СОПРЯЖЕННОГО РЯДА ФУРЬЕ МАТРИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

Н.Т.Половина

Преобразуем числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{I}$$

с помощью $\gamma = \|\gamma_{nk}\|$ - матрицы [I]:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{nk} u_k .$$

Ряд (I) $|\gamma|_p$ - и $[\gamma]_p$ - суммируем, $p\geq 1$, если, соответственно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1}|\sigma_n-\sigma_{n-1}|^{p}<\infty, \quad \sum_{k=1}^{n} k^{p}|\sigma_k-\sigma_{k-1}|^{p}=o(n),\ n\to\infty.$$

Пусть $f(t)$ и $\tilde{f}(t)$ - 2π - периодические функции, интегрируемые по Лебегу в $(-\pi, \pi)$. Поставим им в соответствие ряд Фурье-Лебега и сопряженный ряд Фурье-Лебега:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt = \tag{2}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t),$$