УДК 517.52

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

К.М.Слепенчук, Г.А.Барбашова

Сходящееся в области D бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1+u_k(x)\right]$$

будем называть равномерно сходящимся в этой области, если для любого $\varepsilon>0$ и $n>N$

$$\left|\prod_{k=n+1}^{\infty}\left[1+u_k(x)\right]-1\right|<\varepsilon .$$

Здесь на равномерную сходимость обобщаются некоторые признаки сходимости, известные для числовых бесконечных произведений [I] .

<u>Теорема I.</u> Для того чтобы в D любой равномерно сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(x)-u_{k+1}(x)|$, для которого $u_k(x)\to 0,\ k\to\infty$, равномерно, преобразовывался с помощью $\{\alpha_k(x)\}$ в бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1+\alpha_k(x)u_k(x)\right], \tag{1}$$

сходящееся равномерно в этой области, необходимо и достаточно, чтобы в D

1° $\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x)\right|=|A_n(x)|=O(1)$; 2° $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2(x)=O(1)$.

Необходимость. Заметим, что $|\alpha_k(x)|<C$, где C не зависит от x . Допустим, что это не так. В таком случае существуют такие $\{k_\nu\}$ и $\{x_\nu\}\in D$, что $|\alpha_{k_\nu}(x_\nu)|>2^{\nu-1}$, $\nu=1,2,\dots$. Положим $u_k(x)=0,\ k\neq k_\nu,\ u_k(x_\nu)=\operatorname{sign}\alpha_k(x_\nu)/2^{\nu}$, $k=k_\nu,\ u_k(x)=0,\ k=k_\nu,\ x\neq x_\nu$.

Легко видеть, что выбранная $\{u_k(x)\}$ принадлежит рассматриваемому классу, однако, произведение (I) не может сходиться равномерно, так как

$$\left|\prod_{k=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}}\left[1+\alpha_k(x_\nu)u_k(x_\nu)\right]-1\right|=\frac{1}{2^{\nu+1}}\left|x_{k_{\nu+1}}(x_\nu)\right|>\frac{1}{2}.$$

Пусть не выполнено 1°. В таком случае

$$\left|\sum_{k=k_{\nu-1}+1}^{k_\nu}\alpha_k(x_\nu)\right|>2^\nu\cdot C, \quad \nu=1,2,\ldots .$$

Положим

$$A_\nu=\left|\sum_{k=k_{\nu-1}+1}^{k_\nu}\alpha_k(x_\nu)\right|, \qquad B_\nu=\frac{1}{2^{\nu-1}C}\sum_{k=k_{\nu-1}+1}^{k_\nu}\alpha_k^2(x_\nu).$$

Выберем $\nu_0>10$ так, чтобы $C/\sqrt{2^{\nu_0}}<1/2$. Положим $u_k(x)=0$, $k=1,2,\ldots k_{\nu_0}$; а для $k>k_{\nu_0}$, $u_k(x_\nu)=C^{-1}/2^\nu$, $k_{\nu-1}<k\leq k_\nu$, $u_k(x)=0$, $k_{\nu-1}<k\leq k_\nu$, $x\neq x_\nu$, если $A_\nu>B_\nu$.
и $u_k(x_\nu)=1/2^\nu C$, $k_{\nu-1}<k\leq k_\nu$, $u_k(x)=0$, $k_{\nu-1}<k\leq k_\nu$; $x\neq x_\nu$, если $A_\nu\leq B_\nu$.

Тогда

$$R_\nu=\left|\sum_{k=k_{\nu-1}+1}^{k_\nu}\ln\left[1+\alpha_k(x_\nu)u_k(x_\nu)\right]\right|=$$

$$=\frac{1}{C\cdot 2^\nu}\left|\sum_{k=k_{\nu-1}+1}^{k_\nu}\alpha_k(x_\nu)\right|-\frac{1}{2C^2\,2^{2\nu}}\sum_{k=k_{\nu-1}+1}^{k_\nu}\alpha_k^2(x_\nu)\left[1+\theta_k(x_\nu)\alpha_k(x_\nu)1/2^\nu C\right]^{-2}>$$

$$>\frac{1}{C\cdot 2^\nu}\left|\sum_{k=k_{\nu-1}+1}^{k_\nu}\alpha_k(x)\right|-\frac{1}{C\cdot 2^{\nu+1}}\left|\sum_{k=k_{\nu-1}+1}^{k_\nu}\alpha_k(x_\nu)\right|>\frac{1}{2},$$

если $A_\nu > B_\nu$ и

$$R_\nu > \frac{1}{C^2 \cdot 2^{\nu+1}} \sum_{k=k_{\nu-1}+1}^{k_\nu} \alpha_k^2(x) - \frac{1}{2\sqrt{2^\nu}} \left| \sum_{k=k_{\nu-1}+1}^{k_\nu} \alpha_k(x) \right| > \frac{1}{2},$$

если $A_\nu \leq B_\nu$, $\nu > \nu_0$. Следовательно, произведение (I) не может сходиться в $\mathcal{D}$ равномерно [2].

Пусть не выполнено 2^0. В таком случае

$$\sum_{k=k_{\nu-1}+1}^{k_\nu} \alpha_k^2(x_\nu) > 2^\nu.$$

Положим $u_k(x) = 0$, $k = 1, 2, \dots, k_0$; $u_k(x_\nu) = 1/\sqrt{2^\nu}$, $k_{\nu-1} < k \leq k_\nu$, $u_k(x) = 0$, $k_{\nu-1} < k \leq k_\nu$, $x \neq x_\nu$.

Так как

$$\sum_{k=k_{\nu-1}+1}^{k_\nu} \alpha_k^2(x_\nu) u_k^2(x_\nu) = \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=k_{\nu-1}+1}^{k_\nu} \alpha_k^2(x_\nu) > 1,$$

то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2(x) u_k^2(x) \tag{2}$$

не может сходиться равномерно в $\mathcal{D}$. С другой стороны, из преобразования Абеля

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k(x) u_k(x) = S_{n+p}(x) u_{n+p}(x) - \tag{3}$$

$$- S_n(x) u_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x) [u_k(x) - u_{k+1}(x)]$$

следует для выбранных $\{u_k(x)\}$ равномерная сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x) u_k(x). \tag{4}$$

Значит произведение (I) не может сходиться равномерно в $\mathcal{D}$.

Достаточность. Если условия теоремы выполнены, то из (3) следует равномерная в $\mathcal{D}$ сходимость ряда (4). Легко видеть, что ряд (2) также равномерно сходится в $\mathcal{D}$, а следовательно, равномерно сходится в области $\mathcal{D}$ и произведение (I).

Теорема 2. Для того чтобы в D любой равномерно сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(x)-u_{k+1}(x)|$, для которого $u_k(x)\to a(x)$ равномерно в D, преобразовывалось с помощью $\{\alpha_k(x)\}$ в бесконечное произведение (I), сходящееся равномерно в D, необходимо и достаточно, чтобы в D равномерно сходились ряды

$$3^0 \ \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2(x), \qquad 4^0 \ \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(x)=S(x).$$

Доказательство. Необходимость 3^0 следует из теоремы I. Если положить $u_k(x)=1$, $k=1,2,\ldots$, то мы убеждаемся в том, что произведение $\prod_{k=1}^{\infty}[1+\alpha_k(x)]$, а вместе с ним и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln[1+\alpha_k(x)] \tag{5}$$

необходимо сходятся равномерно [2]. Из равномерной сходимости рядов (5) и 3^0 вытекает равномерная сходимость в D ряда 4^0.

Из преобразования Абеля в форме

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k(x)u_k(x)=\sum_{k=n+1}^{n+p}[S_k(x)-S(x)][u_k(x)-u_{k+1}(x)]-$$

$$-[S_n(x)-S(x)]u_{n+1}(x)+[S_{n+p}(x)-S(x)]u_{n+p+1}(x)$$

следует равномерная сходимость ряда (4). Легко видеть, что ряд (2) также сходится равномерно, а значит равномерно сходится в D и произведение (I).

Л и т е р а т у р а

I. С л е п е н ч у к К.М. Нелинейные преобразования некоторых классов последовательностей (произведений). -"Изв.вузов. Сер.матем.", 1964, № 2.

2. Слепенчук К.М. Некоторые признаки сходимости бесконечных произведений. – "Изв.вузов. Сер.матем.", 1971, №1.

УДК 517.12.

ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА НА СЛУЧАЙ СИЛЬНОЙ СУММИРУЕМОСТИ В СТЕПЕНИ p ДВОЙНЫХ РЯДОВ

Т.Н.Ярковая

Преобразуем двойной ряд

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} u_{kl} \qquad (1)$$

с помощью матрицы $\Gamma = \| \gamma_{kl}^{(m,n)} \|$, следующим образом:

$$\Gamma_{mn} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \gamma_{kl}^{(mn)} u_{kl} .$$

Пусть $\gamma_{kl}^{(mn)} = \gamma_{mk}^{(1)} \gamma_{nl}^{(2)}$, где $\| \gamma_{mk}^{(1)} \| = \gamma^{(1)}$ и $\| \gamma_{nl}^{(2)} \| = \gamma^{(2)}$ суть $[\gamma]_p$ – матрицы [1].

Для заданных положительных последовательностей $\{\lambda_m\}, \{\rho_m\}, \{q_m\}, \{\lambda_n^{(1)}\}, \{\rho_n^{(1)}\}, \{q_n^{(1)}\}$, таких что $\lambda_m \rho_m \uparrow \infty$, $\lambda_n^{(1)} \rho_n^{(1)} \uparrow \infty$ введем следующие обозначения:

$$f_m = \frac{q_{m-1}}{\lambda_m \rho_m}, \qquad g_m = \lambda_m q_m \left(\frac{1}{\lambda_m \rho_m} - \frac{1}{\lambda_{m+1} \rho_{m+1}} \right),$$

$$f_n^{(1)} = \frac{q_{n-1}^{(1)}}{\lambda_n^{(1)} \rho_n^{(1)}}, \qquad g_n^{(1)} = \lambda_n^{(1)} q_n^{(1)} \left(\frac{1}{\lambda_n^{(1)} \rho_n^{(1)}} - \frac{1}{\lambda_{n+1}^{(1)} \rho_{n+1}^{(1)}} \right),$$

$$p_{mn} = \frac{1}{q_m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \lambda_k \rho_k u_{kl}, \qquad q_{mn} = \frac{1}{q_n^{(1)}} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \lambda_l^{(1)} \rho_l^{(1)} u_{kl},$$

$$r_{mn} = \frac{1}{q_m q_n^{(1)}} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \lambda_k \rho_k \lambda_l^{(1)} \rho_l^{(1)} u_{kl} . \qquad (2)$$