

УДК 517.5

# Абсолютная суммируемость методом Вороного интегралов Фурье с множителями

Л. Г. Бойцун\*

\* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,  
Днепропетровск 49050. E-mail: t.rybnikova@gmail.com

Доведена теорема про абсолютне підсумовування методом Вороного інтеграла Фур'є з множником.

*Ключові слова:* підсумовування методом Вороного, метод Чезаро, інтеграл Фур'є.

Доказана теорема об абсолютній суммируемості методом Вороного інтеграла Фур'є з множителем.

*Ключевые слова:* суммирование методом Вороного, метод Чезаро, интеграл Фурье.

In this paper the author proves a theorem on the absolute Voronoi summability of a factored Fourier integral.

*Key words:* the Voronoi means of summability, the Cesaro means, Fourier integral.

1. Пусть функция  $p(t)$  интегрируема на  $[0, y]$ ,  $y > 0$ , и  $P(y) = \int_0^y p(t)dt \neq 0$ .

Пусть функция  $f(u)$  интегрируема на каждом конечном промежутке  $[0, A]$ ,  $A > 0$ , и  $S(t) = \int_0^t f(u)du$ .

Говорят, что интеграл  $\int_0^\infty f(u)du$  суммируется методом Вороного [1],  $|W, p(y)|$  – суммируем, если  $\int_0^\infty |\tau'(y)|dy < \infty$ , где

$$\tau(y) = \frac{1}{P(y)} \int_0^y p(y-u) \cdot S(u)du = \frac{1}{P(y)} \int_0^y P(y-u) \cdot f(u)du.$$

Отметим, что в иностранной математической литературе этот метод называют методом Нерлунда, хотя Нерлунд рассмотрел его 18 лет спустя после введения этого метода Г.Ф. Вороным [2].

Если  $p(t) = t^{\alpha-1}$ ,  $\alpha > 0$ , метод Вороного превращается в известный метод Чезаро,  $(C, \alpha)$  – метод,  $\alpha > 0$  [3].

Пусть функция  $f(u) \in L(-\infty, \infty)$ . Интеграл Фурье этой функции есть

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt = \int_0^{\infty} A(u, x) du.$$

Мы пишем  $\phi(t) = \frac{1}{2} \{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\}$ ;  $\Phi(t) = \int_0^t |\phi(u)| du$ .

2. В настоящей статье доказывается следующая теорема.

**Теорема 1.** Если дважды непрерывно дифференцируемая функция  $\lambda(y)$  такая, что  $\lambda''(y) \geq 0$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda(y)}{y+1} (\ln(y+1))^{\frac{1}{2}} dy < \infty \quad (0.1)$$

и

$$\Phi(t) = O\left(t \left(\ln \frac{1}{t}\right)^k\right), \quad k \geq 0, \quad \text{когда } t \rightarrow \infty, \quad (0.2)$$

тогда интеграл Фурье с множителем

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda(y) \cdot P(y) \cdot A(y, x)}{(y+1) (\ln(y+2))^k} dy$$

$|W, p(y)|$  – суммируем в точке  $t = x$ , где  $p(y)$  и  $-p'(y)$  – обе неотрицательные и невозрастающие функции, а функция  $f(t) \in L(-\infty, \infty)$  и является функцией ограниченной вариации на  $(-\infty, \infty)$ .

Как частный случай из теоремы 1 получаем теорему об абсолютной суммируемости факторизованных интегралов методом Чезаро.

**Теорема 2.** Если дважды непрерывно дифференцируемая функция  $\lambda(y)$  такая, что  $\lambda''(y) \geq 0$ , и выполняются условия (0.1) и (0.2), тогда интеграл Фурье с множителем

$$\int_0^{\infty} \frac{y^\alpha \cdot \lambda(y) \cdot A(y, x)}{(y+1) (\ln(y+2))^k} dy$$

$|C, \alpha|$  – суммируем,  $0 \leq \alpha < 1$ , где функция  $f(t) \in L(-\infty, \infty)$  и является функцией ограниченной вариации на  $(-\infty, \infty)$ .

3. Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие леммы, предполагая, что функция  $f(t)$  удовлетворяет условию теоремы 1.

**Лемма 1.** Если

$$\Phi(t) = O\left(t\left(\ln\frac{1}{t}\right)^k\right), \quad t \rightarrow 0, \quad k \geq 0,$$

тогда

$$\int_0^y [S(u, x) - f(x)]^2 du = O\left(y(\ln y)^{2k+1}\right), \quad y \rightarrow \infty,$$

где  $S(u, x) = \int_0^u A(z, x) dz$ .

**Доказательство.** Интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos z(x-t) dt$  сходится равномерно в любом конечном промежутке изменения  $z$ , так как  $|f(t) \cos z(x-t)| \leq |f(t)|$ . Поэтому

$$\begin{aligned} S(u, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^u dz \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cos z(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_0^u \cos z(x-t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \frac{\sin z(x-t)}{z} dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x+z) + f(x-z)] \frac{\sin uz}{z} dz, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} S(u, x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x+z) + f(x-z)] \frac{\sin uz}{z} dz - \frac{2}{\pi} f(x) \int_0^{\infty} \frac{\sin uz}{z} dz = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(z) \frac{\sin uz}{z} dz. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_0^y [S(u, x) - f(x)]^2 du &= \frac{1}{\pi} \int_0^y \left( \int_0^{\frac{1}{y}} \phi(z) \frac{\sin uz}{z} dz + \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} \phi(z) \frac{\sin uz}{z} dz \right)^2 du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^y \left( \int_0^{\frac{1}{y}} \phi(z) \frac{\sin uz}{z} dz \right)^2 du + \frac{2}{\pi} \int_0^y \left( \int_0^{\frac{1}{y}} \phi(z) \frac{\sin uz}{z} dz \cdot \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} \phi(z) \frac{\sin uz}{z} dz \right) du + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^y \left( \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} \phi(z) \frac{\sin uz}{z} dz \right)^2 du = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Оценим каждый из этих интегралов.  
Мы имеем неравенства

$$\begin{aligned} |\sin uz| &\leq 1 && \text{для всех значений } z, \\ |\sin uz| &\leq uz && \text{для всех } z \geq 0. \end{aligned} \quad (0.3)$$

В силу (0.3) и (0.2) имеем

$$\left( \int_0^{\frac{1}{y}} \phi(z) \frac{\sin uz}{z} dz \right)^2 \leq u^2 \left( \int_0^{\frac{1}{y}} |\phi(z)| dz \right)^2 = O \left( u^2 \frac{1}{y^2} (\ln y)^{2k} \right),$$

так что

$$I_1 = O \left( \frac{1}{y^2} (\ln y)^{2k} \int_0^y u^2 du \right) = O \left( y (\ln y)^{2k} \right).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} \frac{|\phi(z)|}{z} dz = \frac{\Phi(z)}{z} \Big|_{\frac{1}{y}}^{\delta} - \int_{\frac{1}{y}}^{\delta} \frac{\Phi(z)}{z^2} dz = O \left( (\ln y)^k \right) + O \left( (\ln y)^{k+1} \right) = O \left( (\ln y)^{k+1} \right),$$

а

$$\begin{aligned} \int_0^y du \int_{\delta}^{\infty} \frac{\phi(z)}{z} \sin uz dz &= \int_{\delta}^{\infty} \frac{\phi(z)}{z} dz \int_0^y \sin uz dz = \\ &= \int_{\delta}^{\infty} \frac{\phi(z)}{z^2} dz - \int_{\delta}^{\infty} \frac{\phi(z)}{z^2} \cos yz dz = O(1) + o(y). \end{aligned}$$

В виду полученных оценок имеем

$$I_2 = O \left( \frac{(\ln y)^k}{y} \cdot (\ln y)^{k+1} \cdot \int_0^y u du \right) = O \left( y \cdot (\ln y)^{2k+1} \right).$$

Так как  $f(\pm\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  [5], то  $I_3 = O(y)$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.** При выполнении условий леммы 1 имеем

$$\int_0^y |S(u, x) - f(x)| du = O \left( y (\ln y)^{k+1} \right).$$

Доказательство следует из неравенства Гельдера и леммы 1.

**Лемма 3.** *Если*

$$\int_0^t |\phi(u)| du = O\left(t \left(\ln \frac{1}{t}\right)^k\right), \quad k \geq 0 \quad (t \rightarrow 0),$$

тогда

$$\int_0^y \frac{|S(u, x) - f(x)|}{u+1} du = O\left((\ln(y+1))^{3/2+k}\right).$$

**Доказательство.** Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{|S(u, x) - f(x)|}{u+1} du &= \frac{1}{y+1} \int_0^y |S(z, x) - f(x)| dz + \int_0^y \frac{du}{(u+1)^2} \int_0^u |S(z, x) - f(x)| dz = \\ &= O\left(\frac{y(\ln y)^{\frac{1}{2}+k}}{y+1}\right) + O\left(\int_0^y \frac{u(\ln u)^{\frac{1}{2}+k}}{(u+1)^2} du\right) = O\left((\ln y)^{\frac{1}{2}+k}\right) + O\left((\ln y)^{\frac{1}{2}+k} \int_0^y \frac{du}{u+1}\right) = \\ &= O\left((\ln(y+1))^{\frac{1}{2}+k}\right) + O\left((\ln(y+1))^{\frac{3}{2}+k}\right) = O\left((\ln(y+1))^{\frac{3}{2}+k}\right) \end{aligned}$$

в силу леммы 2. Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Если*

$$\int_0^y \frac{|\sigma(u)|}{u+1} du = O\left((\ln(y+1))^{3/2+k}\right), \quad \sigma(u) = \int_0^u f(t) dt,$$

и

$$S(u) = \int_0^u f(t) \cdot (\ln(t+2))^{-\frac{1}{2}} dt,$$

тогда

$$\int_0^y \frac{|S(u)|}{u+1} du = O\left((\ln(y+1))^{3/2+k}\right).$$

**Доказательство.** Интегрируя по частям, получаем

$$S(u) = \int_0^u f(t) (\ln(t+2))^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{\sigma(u)}{(\ln(u+2))^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \int_0^u \frac{\sigma(t) dt}{(t+2)(\ln(t+2))^{\frac{3}{2}}},$$

так что

$$\int_0^y \frac{S(u)}{u+1} du = \int_0^y \frac{\sigma(u) du}{(u+1)(\ln(u+2))^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \int_0^y \frac{du}{u+1} \int_0^u \frac{\sigma(t) dt}{(t+2)(\ln(t+2))^{\frac{3}{2}}}$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{S(u)}{u+1} du &\leq \frac{1}{(\ln 2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^y \frac{|\sigma(u)|}{u+1} du + \frac{1}{2} \int_0^y \frac{|\sigma(t)| dt}{(t+2)(\ln(t+2))^{\frac{3}{2}}} \int_t^y \frac{du}{u+1} = \\ &= O((\ln(y+1))^{3/2+k}) + O\left(\ln(y+1) \int_0^y \frac{|\sigma(t)|}{t+1} dt\right) = \\ &= O((\ln(y+1))^{3/2+k}) + O((\ln(y+1))^{1/2+k}) = O((\ln(y+1))^{3/2+k}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

4. Перейдем к доказательству теоремы 1.

**Доказательство теоремы 1.** В [4] доказана следующая теорема.

**Теорема А.** Если дважды непрерывно дифференцируемая функция  $\lambda(y)$  такая, что  $\lambda''(y) \geq 0$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda(y)}{y+1} (\ln(y+1))^{\frac{1}{2}} dy < \infty$$

и

$$\int_0^y \frac{|S(u)|}{u+1} du = O(\ln(y+1))^{k+1}, \quad k \geq 0,$$

тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{P(y) \cdot \lambda(y) \cdot f(y) dy}{(y+1)(\ln(y+2))^{k+\frac{1}{2}}}$$

$|W, p(y)|$  – суммируем, где  $p(y)$  и  $-p'(y)$  – обе неотрицательные и невозрастающие функции.

Применяя теорему А к нашему результату, мы видим, что в роли  $f(y)$  выступает  $\frac{A(y, x)}{(\ln(y+2))^{\frac{1}{2}}}$ , в роли  $S(u)$  выступает  $\int_0^u \frac{A(z, x)}{(\ln(z+2))^{\frac{1}{2}}} dz$ , в роли  $\sigma(u)$  выступает  $\int_0^u A(z, x) dz$ .

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{\sigma(u)}{u+1} du &= \int_0^y \frac{du}{u+1} \int_0^u A(z, x) dz = \int_0^y \frac{S(u, x)}{u+1} du = \\ &= \int_0^y \frac{S(u, x) - f(x) + f(x)}{u+1} du = \int_0^y \frac{S(u, x) - f(x)}{u+1} du + f(x) \int_0^y \frac{du}{u+1}. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{|\sigma(u)|}{u+1} du &\leq \int_0^y \frac{|S(u, x) - f(x)|}{u+1} du + |f(x) \cdot \ln(u+1)| = \\ &= O((\ln(y+1))^{3/2+k}) + O(\ln(y+1)) = O((\ln(y+1))^{3/2+k}) \end{aligned}$$

в силу леммы 3.

Применяя лемму 4, получаем, что

$$\int_0^y \frac{|S(u, x)|}{u+1} du = O((\ln(y+1))^{k+1}), \quad k \geq 0 \quad (y \rightarrow \infty),$$

т. е. выполняются условия теоремы А, что завершает доказательство теоремы 1.

### Библиографические ссылки

1. *Вороной Г. Ф.* Распирение понятия о пределе суммы бесконечного ряда / Г.Ф. Вороной // Собр. соч: В 3 т. – Киев, 1952. – Т. 3. – С. 9–10.
2. *Nörlund M.E.* Sur une application des fonctions permutables // Zunds Universitets Arsskift (2), 1919. – Vol. 16, № 3. – P. 1–10.
3. *Титчмарш Е. С.* Введение в теорию интеграла Фурье / Е. С. Титчмарш. – М., 1948. – 479 с.
4. *Бойцун Л. Г.* Абсолютная суммируемость методом Вороного интегралов с множителями / Л. Г. Бойцун, Т. И. Рыбникова // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Математика, 2012. – Т. 1, № 6/1. – С. 1–12.
5. *Бойцун Л. Г.* О суммировании тригонометрических интегралов Фурье методом Г.Ф. Вороного / Л. Г. Бойцун // Изв. вузов. Математика, 1971. – № 10. – С. 16–23.

Надійшла до редколегії 30.04.2013