5. Безверщенко И.И. О применении некоторых модификаций метода С.А.Чаплыгина к предельной задаче Коши.- "Укр. матем. журнал", 1971, № 2, с.221-229.

УДК 521.13

О РЕГУЛЯРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ МАТЕРИАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ

Л.И.Бойко

Исследуются дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения осесимметричного тела под действием притяжения сферического шара в полярных координатах и углах Эйлера [1] :

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot r - r(\dot B^2+\dot L^2\cos^2 B)=\lambda\frac{\partial U}{\partial r}\\
&\frac{d}{dt}(r^2\dot L\cos^2 B)=\lambda\frac{\partial U}{\partial L}\\
&\frac{d}{dt}(r^2\dot B)+r^2\dot L^2\cos B\sin B=\lambda\frac{\partial U}{\partial B}\\
&\ddot\psi+\frac{2A-C}{A}\operatorname{ctg}\theta\,\dot\psi\dot\theta-\frac{C}{A\sin\theta}\dot\theta\dot\varphi=\frac{1}{A\sin^2\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi}\\
&A\ddot\theta-A\cos\theta\sin\theta\,\dot\psi^2+Cr_0\sin\theta\,\dot\psi=\frac{\partial U}{\partial\theta}\\
&\ddot\varphi-\frac{A+(A-C)\cos^2\theta}{A\sin\theta}\dot\psi\dot\theta+\frac{C}{A}\operatorname{ctg}\theta\,\dot\theta\dot\varphi=-\frac{\cos\theta}{A\sin^2\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi}
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

где

r, L, B — сферические координаты центра g тела M в системе осей неизменного направления $g_0\xi\eta\zeta$ в центре g_0 шара M_0 ; ψ, θ, φ — углы процессии, нутации, ротации тела M, $r_0=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi=const$, $\lambda=\frac{m_0+m}{m_0 m}$ (m_0 — масса шара M_0, m — масса тела M), в этих уравнениях U — силовая функция взаимного притяжения

по

шара M_0 (или его центра масс g_0) и тела M.

Нетрудно показать при помощи интеграла $r_0 \equiv \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta = const$, что шестое уравнение системы (I), сводится к четвертому уравнению той же системы. Таким образом, последнее уравнение системы выпадает из рассмотрения и движение осесимметричного тела определяется первыми пятью уравнениями системы (I), из которых три первых выражают движение центра масс тела, а последние два – его вращательное движение вокруг центра масс.

Рассмотрим теперь однородный стержень $g_1 g_2$ длины $2l$, плотности δ, силовая функция u которого определяется формулой [2]

$$\frac{1}{\mu\delta} u = \ln\frac{r_1+r_2+2l}{r_1+r_2-2l} = 2\,Arcth\,\frac{r_1+r_2}{2l} \qquad (\mu = f m_0),$$

где

$$r_1 = \sqrt{l^2+r^2-2rl\nu}, \qquad r_2 = \sqrt{l^2+r^2+2rl\nu},$$

f – постоянная тяготения.

Здесь

$$\nu = \cos\Phi = \sin\theta\cos\beta\sin(\psi-\lambda) + \cos\theta\sin\beta,$$

где

$$\Phi = \overline{g_0 g}, \overline{g_1 g_2}$$

Очевидно, что функция сил $u = u(r,\nu)$, рассматриваемая как функция ν на отрезке $-1 \le \nu \le 1$, принимает минимум при $\nu = 0$ $(r_1 = r_2)$ и наибольшее значение при $\nu = 1$ $(r_1 = r-l,$ $r_2 = r+l)$ и $\nu = -1$ $(r_1 = a+l,\ r_2 = a-l)$.

Характерной особенностью стержня или гантели в отличие от произвольного случая осесимметричного тела является то, что его ориентация в пространстве определяется только двумя углами Эйлера ψ и θ; говорить о вращении стержня вокруг самого себя, очевидно, не имеет смысла. Для таких тел

$C=0$, а величина φ – неопределенна.

Уравнения движения центра масс допускают плоские движения ($\theta=0$), которые определяются первыми двумя уравнениями системы (I) при условии либо $\cos\theta=0$, либо $\vartheta=0$ (т.е. $\sin\theta=0$):

$$\left.\begin{aligned} r'' &= rL'^2 + \frac{\lambda}{n^2}\frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{d}{d\tau}(r^2 L') &= \frac{\lambda}{n^2}\frac{\partial U}{\partial L} \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

где штрих обозначает дифференцирование по $\tau = nt$, $n=const$.

В случае стержня или гантели упрощаются уравнения вращательного движения и принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(\sin^2\theta\,\psi') &= \frac{1}{n^2 A}\frac{\partial U}{\partial \psi} \\ \theta'' - \cos\theta\sin\theta\,\psi'^2 &= \frac{1}{n^2 A}\frac{\partial U}{\partial \theta} \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Введем вместо $\psi, L, \psi - L$ переменные $\tilde\psi=\psi-\tau$, $\tilde L = L-\tau$, $\tilde\psi-\tilde L$.
Тогда уравнения плоского движения (2) и (3) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} r'' &= r(\tilde L'+1)^2 + \frac{\lambda}{n^2}\frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{d}{d\tau}\left[r^2(\tilde L'+1)\right] &= \frac{\lambda}{n^2}\frac{\partial U}{\partial \tilde L} \\ \frac{d}{d\tau}\left[\sin^2\theta(\tilde\psi'+1)\right] &= \frac{1}{n^2 A}\frac{\partial U}{\partial \tilde\psi} \\ \theta'' - \cos\theta\sin\theta(\tilde\psi'+1)^2 &= \frac{1}{n^2 A}\frac{\partial U}{\partial \theta} \end{aligned}\right\}, \qquad (4)$$

где все частные производные вычисляются при $\theta=0$, $\sin 2\theta=0$.

Вместо θ и $\tilde\psi$ можно ввести x и y: $x=-\sin\theta\cos\tilde\psi$, $y=-\sin\theta\sin\tilde\psi$. Тогда уравнения (4) допускают следующие частные решения с круговой орбитой:

I-е "поплавок" ($\sin\theta=0$);

$r=a$, $\tilde L=0$, $x=0$, $y=0$,

$r'=0$, $\tilde L'=0$, $x'=0$, $y'=0$,

2-е "спица" ($\cos\theta=0$);

$r=a$, $\tilde L=0$, $x=0$, $y=\pm1$,

$r'=0$, $\tilde L'=0$, $x'=0$, $y'=0$,

3-е "стрела" ($\cos\theta = 0$):

$$r=a,\ \hat{L}=0,\ x=\pm 1,\ y=0,$$
$$r'=0,\ \hat{L}'=0,\ x'=0,\ y'=0,$$

где постоянные a, n удовлетворяют соотношению

$$an^2+\lambda\frac{\partial u}{\partial a}=0.$$

Заметим, что в случае $\nu=0$ частные производные от u по переменным $\hat{L}, \hat{\varphi}, \theta$ равны нулю одновременно с производной по ν и уравнения (4) распадаются на две независимые системы, интегрируемые в квадратурах (одна из них описывает плоское движение центра масс стержня или гантели в поле центральной силы $u'_r(r,0)$, а другая – вращательное движение этих тел вокруг центра масс по инерции).

Важно заметить, также, что при $\sin 2\varphi \neq 0$ и $\nu=0$ ($\sin(\varphi-L)=0$) не существует регулярных движений стержня или гантели, допускаемых уравнениями (I) общего случая. В случае $\nu=0$ существуют также и частные решения, определяющие прямолинейные движения центра масс вида

$$r=r(t),\quad L=L_0,\quad B=B_0, \tag{5}$$

где r удовлетворяет уравнению $\ddot{r}=\lambda u'_r(r,0)$, а углы φ и θ удовлетворяют указанным уравнениям вращательного движения стержня или гантели по инерции.

В случае $\nu=\pm 1$ уравнения движения также допускают частное решение с прямолинейной орбитой вида (5), но при этом углы φ и θ сохраняют постоянное значение φ_0 и θ_0, как и углы L и B, а величина r удовлетворяет уравнению $\ddot{r}=\lambda u'_r(r,1)$.

В случае $\cos\theta=0$ производная $\frac{\partial u}{\partial \theta}=0$, и 4-е уравнение системы (4) для угла θ выпадает из рассмотрения и система уравнений плоского движения приводится к следующему простейшему виду:

$$\left.\begin{aligned} r'' &= r(\tilde{L}'+1)^2 + \frac{\lambda}{n^2}\frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{d}{d\tau}\left[r^2(\tilde{L}'+1)\right] &= \frac{\lambda}{n^2}\frac{\partial u}{\partial \tilde{L}} \\ \tilde{\psi}'' &= \frac{1}{n^2 A \sin^2\theta}\frac{\partial u}{\partial \tilde{\Psi}} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где частные производные от u по переменным $r, \tilde{L}, \tilde{\Psi}$ вычисляются при $B=0$, $\cos\theta=0$, $\nu=\cos\Phi=\pm\sin(\tilde{\Psi}-\tilde{L})$,
$\frac{\partial\nu}{\partial\tilde{L}} = -\frac{\partial\nu}{\partial\tilde{\Psi}} = \pm\cos(\tilde{\Psi}-\tilde{L})$.

Система уравнений шестого порядка (6) определяет плоское поступательно-вращательное движение стержня, гантели и других прямолинейных тел и допускает решения типа "спица", "стрела".

Полученные регулярные движения стержня могут служить базой для отыскания колебаний, близких к указанным регулярным.

Литература

I. Д у б о ш и н Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Физматгиз, 1975.

2. К о н д у р а р ь В.Т. Некоторые вопросы проблемы двух тел. – „Тр. Ивановского энергоинститута", [illegible], вып. [illegible].