УДК 539.3

КАНОНИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ В ЗАДАЧЕ ОБ ИЗГИБЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

О.В.Бугрим, Е.С.Синайский

Дифференциальное уравнение изгиба поперечно нагруженной круглой пластины для прогиба $W(r,\theta)$ примем в форме [1]:

$$D\nabla^2\nabla^2 W+\frac{dD}{dr}\left(2\frac{\partial^3 W}{\partial r^3}+\frac{2+\nu}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^3 W}{\partial r\partial\theta^2}-\right. \tag{1}$$

$$\left.-\frac{3}{r^3}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}\right)+\frac{d^2D}{dr^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}\right)=q.$$

Здесь $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость изгиба пластины, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, r и θ полярные координаты точки, q – интенсивность нормальной к срединной плоскости нагрузки, h – толщина пластины.

Пусть имеет место осесимметричный случай и жесткость меняется по закону

$$D=D_0 x^{\gamma_0}(1-\omega x)^{\beta_0}, \tag{2}$$

где

$$D_0=\frac{E_0 h^3}{12(1-\nu^2)},\quad x=\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha_0}\quad (0<x\leq 1),$$

r_0 – радиус наружного контура пластины, $\alpha_0>0$, β_0, γ_0, ω – постоянные.

В предположении, что нагрузка q не связана с прогибом и допускает представление

$$q=\sum_{j=0}^{L} q_j r^j, \tag{3}$$

уравнение (1) постановкой

$$\frac{dW}{dr} = -x^{\alpha}(1-\omega x)^{1-\beta_0} y \qquad (4)$$

преобразуется к виду [I]

$$Ly \equiv x(1-\omega x)\frac{d^2y}{dx^2} + [c-\omega(a+b+1)x]\frac{dy}{dx} - \omega a b y = \sum_{j=0}^{l+1} F_j x^{\lambda_j - 1} \qquad (5)$$

Здесь

$$c = 2\alpha + \gamma_0 + 1, \quad \alpha = -\frac{\gamma_0}{2} - \frac{1}{2\alpha_0}\sqrt{(\alpha_0\gamma_0 - 2\nu)^2 + 4(1-\nu^2)}, \quad F_0 = \frac{C r_0}{D_0 \alpha_0^2},$$

$$F_j = -\frac{q_{j-1} r_0^{j+2}}{D_0 \alpha_0^2 (j+1)}, \quad \lambda_j = \lambda_0 + \frac{j+1}{\alpha_0}, \quad (j = 1, 2, \ldots, l+1)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\alpha_0} - \alpha - \gamma_0 > 0, \quad a, b = \frac{c - \beta_0 + 1}{2} \pm \frac{1}{2\alpha_0}\sqrt{[\alpha_0(\beta_0 + \gamma_0) - 2\nu]^2 + 4(1-\nu^2)}.$$

Постоянная C определяется из граничных условий для поперечного усилия на внутреннем или наружном контуре пластины [I]

При дробных показателях λ_j точного решения уравнения (5) в полиномах не существует. Однако приближенно его можно получить, используя τ - метод Ланцоша [2].

Для каждого члена вида $x^{\lambda+m}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, помещенного в правую часть уравнения $Ly = 0$, применяя метод неопределенных коэффициентов, найдем канонический полином

$$Q_m(x,\lambda) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^{\lambda+j}, \qquad (7)$$

который удовлетворяет уравнению $Ly = x^{\lambda+m}$ с точностью до слагаемого, содержащего наименьшую степень x, т.е.

$$L Q_m(x,\lambda) = x^{m+\lambda} + R_m(\lambda) x^{\lambda-1} \qquad (8)$$

В случае оператора L, определенного уравнением (5), получаем

$$Q_m(x,\lambda) = -\frac{1}{(\lambda+c+m)(\lambda+1+m)} \sum_{p=0}^{m} \prod_{j=p}^{m} \frac{(\lambda+c+j)(\lambda+1+j)}{(\lambda+a+j)(\lambda+b+j)} \omega^{p-m-1} x^{p+\lambda}, \tag{9}$$

$$R_m(\lambda) = -\omega^{-(m+1)} \prod_{j=0}^{m} \frac{(\lambda+c+j-1)(\lambda+j)}{(\lambda+a+j)(\lambda+b+j)} \qquad (m=0,1,2,\ldots). \tag{10}$$

В правую часть уравнения (5) введем невязку в форме

$$T_k^*(x) \sum_{j=0}^{l+1} \tau_j x^{\lambda_j} + T_n^*(x)(\tau_1^o + \tau_2^o x), \tag{11}$$

где $\tau_1^o, \tau_2^o, \tau_j$ - пока неизвестные параметры,

$$T_i^*(x) = \sum_{m=0}^{i} c_i^m x^m \tag{12}$$

- смещенные полиномы Чебышева.

При условии

$$\tau_j = \frac{F_j}{\sum_{m=0}^{k} c_k^m R_m(\lambda_j)} \tag{13}$$

точным решением "исправленного" уравнения (5) будет

$$y^* = \sum_{j=0}^{l+1} \tau_j \sum_{m=0}^{k} c_k^m Q_m(x,\lambda_j) + \sum_{m=0}^{n} c_n^m \left[\tau_1^o Q_m(x,0) + \tau_2^o Q_m(x,1)\right]. \tag{14}$$

Параметры τ_1^o и τ_2^o определяются из граничных условий задачи.

Ввиду того, что $|x| \leq 1$, $\lambda_j > 0$, $|T_i^*(x)| \leq 1$ абсолютная величина невязки (II) не превосходит суммы $|\tau_1^o| + |\tau_2^o| + \sum|\tau_j|$, которая с увеличением порядка полиномов (I2) может быть сделана весьма малой [2]. Таким образом невязку (II) естественно рассматривать как малое возмущение нагрузочной функции в правой части уравнения (5), а выражение (I4) считать приближенным решением этого уравнения.

Если некоторые или даже все λ_j – целые положительные числа, то соответствующие τ_j в невязке (II) целесообразно положить равными 0. При этом в решение (I4) взамен должны быть введены слагаемые вида $F_j Q_{\lambda_j-1}(x,0)$ – частные решения уравнений $Ly = F_j x^{\lambda_j-1}$. Количество τ – членов можно также уменьшить, если для всех j $\lambda_j = \lambda + s$, где $\lambda = const$, $s = s(j)$ – целые положительные числа или 0. В частности это имеет место при $\alpha_0 = 1/N$ (N – целое). В этом случае, выбирая невязку в форме

$$\tau x^{\lambda} T_k^*(x) + T_n^*(x)(\tau_1^o + \tau_2^o x), \tag{I5}$$

находим

$$y^* = \tau \sum_{m=0}^{k} c_k^m Q_m(x,\lambda) + \sum_{j=0}^{l+1} F_j Q_{s-1}(x,\lambda) + \sum_{m=0}^{n} c_n^m \left[\tau_1^o Q_m(x,0) + \tau_2^o Q_{m+1}(x,0)\right],$$

$$\tau = -\sum_{j=0}^{l+1} F_j R_{s-1}(\lambda) \left[\sum_{m=0}^{k} c_k^m R_m(\lambda)\right]^{-1}. \tag{I6}$$

Изложенный метод был применен к задаче изгиба пластины с линейно меняющейся толщиной при тех же значениях параметров, что и в работе [I]. Полученное простое решение в форме многочлена шестой степени отличается от приведенного в [I] не более, чем на 2%.

Литература

I. Коваленко А.Д. Круглые пластины переменной толщины. М., Физматгиз, 1959.

2. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.