УДК 51.946

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ПО МЕТОДУ В.К.ДЗЯДЫКА ЗАДАЧИ ГУРСА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.П.Бурлаченко, Ю.И.Романенко

Аппроксимационный метод, предложенный В.К.Дзядыком в [1], обобщен в [2] на случай задачи Гурса с нелинейной правой частью. В настоящей статье с помощью операторов Фурье-Чебышева этим же методом строится многочлен, приближающий решение задачи Гурса с постоянными коэффициентами, и устанавливается погрешность приближения. При этом результаты этой статьи были приспособлены для численного решения данной задачи на ЭВМ. Оказалось, аппроксимационный метод имеет очевидные преимущества перед другими методами, например, методом последовательных приближений.

Основные этапы решения следующие. Известно [3], что задача Гурса с постоянными коэффициентами всегда сводится к виду:

$$Z_{xy} = aZ + f(x,y), \quad a = const, \tag{1}$$

$$Z(x,0) = Z(0,y) = 0. \tag{2}$$

С помощью функции

$$e(x,y;t,s) = \begin{cases} 1, & (t \le x) \wedge (s \le y) \\ 0, & (t > x) \vee (s > y) \end{cases}$$

задача (1) - (2) может быть заменена эквивалентным уравнением

$$Z(x,y) = \int_0^h \int_0^h e(x,y;t,s)[aZ(t,s) + f(t,s)]\,dt\,ds, \tag{3}$$

где $h > 0$ - некоторое число.

Пусть $\{T_k(x)\}_0^\infty$ система полиномов Чебышева, заданная на $[-1,1]$. Введем линейный непрерывный полиномиальный оператор

$$U_{nm}[\Psi(\xi,\eta);x,y;\Lambda,M]=\sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{m}a_{kr}\lambda_k^{(n)}\mu_r^{(m)}T_k\left(\frac{2x}{h}-1\right)T_r\left(\frac{2y}{h}-1\right), \quad (4)$$

построенный на основании системы полиномов Чебышева, где $\lambda_k^{(n)}$, $\mu_r^{(m)}$ – числа, определяющие процесс суммирования двойного ряда Фурье–Чебышева.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$Z_{nm}(x,y)=\int_0^h\int_0^h U_{nm}[e(\xi,\eta;t,s);x,y;\Lambda,M][aZ_{nm}(t,s)+f(t,s)]\,dt\,ds \quad (5)$$

Как и в [I], можно показать, что решением этого уравнения будет полином вида

$$Z_{nm}(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{m}C_{kr}\lambda_k^{(n)}\mu_r^{(m)}T_k\left(\frac{2x}{h}-1\right)T_r\left(\frac{2y}{h}-1\right). \quad (6)$$

Так как

$$U_{nm}[e(\xi,\eta;t,s);x,y;\Lambda,M]=\sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{m}a_{kr}(t,s)\lambda_k^{(n)}\mu_r^{(m)}T_k\left(\frac{2x}{h}-1\right)T_r\left(\frac{2y}{h}-1\right), \quad (7)$$

где

$$a_{kr}(t,s)=\frac{16}{\pi^2h^2}\int_0^h\int_0^h\frac{e(x,y;t,s)\,T_k\left(\frac{2x}{h}-1\right)T_r\left(\frac{2y}{h}-1\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{h}-1\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{2y}{h}-1\right)^2}}\,dx\,dy,$$

то, подставляя (6) и (7) в (5), для определения коэффициентов C_{kr} после несложных вычислений получим следующую линейную систему уравнений, эквивалентную уравнению (5)

$$C_{kr}-\frac{ah^2}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\cos kx\cos ry\int_x^\pi\int_y^\pi\sin t\sin s\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\lambda_i^{(n)}\mu_j^{(m)}C_{ij}\cos it\times$$

$$\times\cos js\,dt\,ds\,dx\,dy=\frac{h^2}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\cos kx\cos ry\int_x^\pi\int_y^\pi\sin t\sin s\times$$

$$\times f\left(\frac{1+\cos t}{2}h,\frac{1+\cos s}{2}h\right)dt\,ds\,dx\,dy. \quad (8)$$

Знаменатель системы (8) есть многочлен относительно h.

Поэтому всегда существует $h>0$, при котором этот определитель не равен нулю, и, следовательно, система (8) имеет единственное решение.

Вопрос об уклонении $Z_{nm}(x,y)$ от решения $Z(x,y)$ задачи (I)-(2) решается с помощью следующего утверждения.

Теорема. Каковы бы ни были линейный непрерывный полиномиальный оператор $U_{nm}[\psi(\xi,\eta);x,y]$, отображающий $\mathcal{L}^{\infty}$ в C, и положительное число h, обладающее тем свойством, что уравнение (5) разрешимо, решение $Z_{nm}(x,y)$ этого уравнения приближает в квадрате $[0,h]\times[0,h]$ решение $Z(x,y)$ задачи (I)-(2) так, что при этом

$$\|Z(x,y)-Z_{nm}(x,y)\| \leq (1+\alpha_{nm})e^{|a|h^2}\|Z(x,y)-U_{nm}[Z;x,y]\|,$$

где

$$\alpha_{nm}=\begin{cases}\dfrac{|a|h^2e^{|a|h^2}\varepsilon_{nm}}{2-|a|h^2e^{|a|h^2}\varepsilon_{nm}}, & |a|h^2e^{|a|h^2}\varepsilon_{nm}<2,\\ \infty, & |a|h^2e^{|a|h^2}\varepsilon_{nm}\geq 2;\end{cases}$$

$$\varepsilon_{nm}=\sup_{\psi\in H_{[-1,1]\times[-1,1]}}\|\psi(x,y)-U_{nm}[\psi;x,y]\|_{C[-1,1]\times[-1,1]}.$$

Доказательство этой теоремы является обобщением на случай двух переменных доказательства соответствующей теоремы из [I].

Пример. Если для задачи (I)-(2) положить

$$h=1,\quad a=-16,\quad f(x,y)=xy+\frac{1}{16},\quad \lambda_i^{(n)}\equiv\mu_j^{(m)}=1,$$

то, решая систему (8) с помощью ЭВМ "Минск-22 М", получим при $n=m=2$ аппроксимирующий многочлен $Z_{22}(x,y)$ в виде

$$Z_{22}(x,y)=0{,}0025+0{,}0047(x+y)+0{,}0226xy+$$
$$+0{,}0067(x^2+y^2)-0{,}0229(x^2y+y^2x)+$$
$$+0{,}0686x^2y^2.$$

Поскольку $Z=\frac{xy}{16}$ есть точное решение задачи (1)-(2), то легко проверить, что

$$\max_{0\le x,y\le 1}|Z(x,y)-Z_{22}(x,y)|=\max_{0\le x,y\le 1}\left|\frac{xy}{16}-Z_{22}(x,y)\right|=0{,}014.$$

Литература

1. Дзядык В.К. О применении линейных методов к приближению полиномами решений обыкновенных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений Гаммерштейна. - "Изв.АН СССР. Сер.матем.", 1970, т.34, № 4.

2. Бурлаченко В.П., Романенко Ю.И. О приближении решения задачи Гурса операторами Фурье-Чебышева.- В сб.: Исслед. по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям, Днепропетровск, ДГУ, 1975.

3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., "Наука", 1972.

УДК 513.514

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ НОРМАЛЬНО-ИНФЛЕКЦИОННЫХ КОМПЛЕКСОВ С ПРОСТЫМ ИНФЛЕКЦИОННЫМ ЦЕНТРОМ В E_3

Е.Н.Ищенко

Квазиспециальные комплексы, распадающиеся на плоские пучки прямых, плоскости которых перпендикулярны к поверхности, описываемой инфлекционным центром луча комплекса, названы