УДК 517.9

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ И КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

С.С.Крицкая

Пусть L_1 и L_2 линейные операторы вида

$$L_1=\frac{d^2}{dx^2}\left[I(x)\frac{d^2}{dx^2}\right], \qquad L_2=A(x)-\frac{d}{dx}\left[I(x)\frac{d}{dx}\right].$$

В дальнейшем будем считать, что функции $A=A(x)$, $I=I(x)$ вещественные, положительные и $A(x)$ непрерывна, а $I(x)$ имеет непрерывную четвертую производную для $0\le x\le l$.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$L_1 z=\lambda L_2 z, \tag{1}$$

$$z(0)=z''(0)=z(l)=z''(l)=0. \tag{2}$$

Обозначим $z_n(x)$ - собственные функции этой краевой задачи, соответствующие собственному значению λ_n, нормированные условием

$$\int_0^l \{I(\xi)z_n'^2(\xi)+A(\xi)z_n^2(\xi)\}d\xi=1. \tag{3}$$

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную четвертую производную для $0\le x\le l$ и $f(0)=f''(0)=f(l)=f''(l)=0$, то она разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся для $0\le x\le l$ ряд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^l f(\xi)L_2 z_n(\xi)d\xi\right\}z_n(x). \tag{4}$$

Показывается эта теорема методом контурного интегрирования (см. [1]).

Пусть $\mathcal{G}(x,\xi,\lambda)$ – функция Грина оператора $L_1-\lambda L_2$ и $\mathcal{G}(x,\xi)=\lim\limits_{\lambda\to 0}\mathcal{G}(x,\xi,\lambda)$, то имеет место разложение в равномерно и абсолютно сходящийся для $0\le x\le l,\ 0\le\xi\le l$ ряд

$$\mathcal{G}(x,\xi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_n(x)Z_n(\xi)}{\lambda_n}. \tag{5}$$

Аналитическое выражение ядра $\mathcal{G}(x,\xi)$ следующее:

$$\mathcal{G}(x,\xi)=\begin{cases}\Phi(x,\xi), \text{ если } 0\le\xi\le x,\\ \Phi(\xi,x), \text{ если } x\le\xi\le l,\end{cases} \tag{6}$$

где
$$\Phi(u,v)=\frac{v}{l}\int_0^u d\zeta\int_0^{\zeta}\frac{\eta-l}{I(\eta)}d\eta+\frac{uv}{l^2}\int_0^l d\zeta\int_0^{\zeta}\frac{l-\eta}{I(\eta)}d\eta+$$
$$+\frac{u-l}{l}\int_0^v d\zeta\int_0^{\zeta}\frac{\eta}{I(\eta)}d\eta.$$

Требуется найти решение дифференциального уравнения

$$\gamma_1 l_1(\mu y+Ey'_t)=g\,l_2(E^2y'_t+\mu E_1 y), \tag{7}$$
$$l_1=\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left[I(x)\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right]-A(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2},\quad l_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{I(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\},$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0,t)=0,\qquad E\frac{\partial^3 y(0,t)}{\partial x^2\partial t}+\frac{\mu E_1}{E}\frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2}=0, \tag{8}$$
$$y(l,t)=0,\qquad E\frac{\partial^3 y(l,t)}{\partial x^2\partial t}+\frac{\mu E_1}{E}\frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2}=0$$

и начальным условиям

$$y(x,0)=\varphi_0(x),\ y'_t(x,0)=\varphi_1(x),\ y''_{t^2}(x,0)=\varphi_2(x),\ (0\le x\le l) \tag{9}$$

где γ, g, E, E_1, μ – некоторые положительные числа, $\varphi_i(x),\ i=0,1,2$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы.

Отметим, что задаче (7)-(9) удовлетворяет, например, функция $y=y(x,t)$ – отклонения точек оси упруго-вязко-релаксирующего стержня конечной длины со свободно опертыми концами при поперечных колебаниях с учетом влияния инерции вращения.

Учитывая формулы (5)-(6), решение задачи (7)-(9) может быть записано в виде

$$y(x,t)=e^{-ct}\varphi_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_{0n}(e^{r_{1n}t}-e^{-ct})-A_n e^{r_{1n}t}\}Z_n(x)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(r_{1n}+a)t/2}(A_n\cos r_{2n}t+B_n\sin r_{2n}t)Z_n(t), \qquad (10)$$

где

$A_n=d_n[a_{2n}-r_{1n}^2a_{0n}+b_n(a+r_{1n})]$, $aE=\mu$, $b_n=a_{1n}-r_{1n}r_{0n}$, $b=\frac{gE}{\gamma}$, $c=\frac{aE_1}{E}$,

$d_n[\lambda_n b+r_{1n}(2a+3r_{1n})]=1$, $B_n r_{2n}=b_n+\frac{1}{2}(3r_{1n}+a)A_n$, $b_n=a_{1n}-r_{1n}a_{0n}$,

$a_{in}=\frac{1}{\lambda_n}\int_0^l L_1\varphi_i(\xi)Z_n(\xi)d\xi$, $i=0,1,2$, $r_{1n}=\alpha_{1n}+\alpha_{2n}-\frac{a}{3}$, $r_{2n}=\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_{1n}-\alpha_{2n})$,

$\alpha_{in}=\sqrt[3]{\beta_{1n}+(-1)^{i-1}\beta_{2n}}$, $i=1,2$, $\beta_{1n}=\lambda_n b\frac{a-3c}{6}-\frac{a^3}{27}$, $\beta_{2n}=\sqrt{\beta_{1n}^2+\left(\frac{\lambda_n b}{3}-\frac{a^2}{9}\right)^3}$.

Применяя асимптотику для собственных значений и собственных функций краевой задачи (1)-(2) (см. [2]):

$$Z_n(x)=\sqrt{\frac{l}{2I(x)}}\frac{1}{k\pi}\sin k\pi\frac{x}{l}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ \lambda_n=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2+\gamma_1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\ (k-n=const),$$

где

$$\gamma_1=\frac{2}{l}\left\{\frac{I'(0)}{I(0)}-\frac{I'(l)}{I(l)}\right\}-\frac{1}{l}\int_0^l\left\{\frac{A(\xi)}{I(\xi)}-\frac{3}{2}\frac{I''(\xi)}{I(\xi)}+\frac{5}{4}\frac{I'^2(\xi)}{I^2(\xi)}\right\}d\xi$$

и некоторые свойства тригонометрических рядов, устанавливаем, что функция $y(x,t)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные до четвертого порядка для $t\geq 0,\ 0\leq x\leq l$, которые могут быть вычислены почленным дифференцированием рядов, стоящих в (10).

Частная производная $\frac{\partial^5 y}{\partial x^4\partial t}$ непрерывна при $t\geq 0,\ 0\leq x\leq l$ для точек, не лежащих на прямых

$$x+\sqrt{b}\,t=ml, \qquad (11)$$
$$\sqrt{b}\,t-x=ml\quad (m=0,1,2,\dots) \qquad (11)$$

Для ее вычисления выделим из ряда для $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ ряд

$$\frac{2}{b\sqrt{I(x)}}\, e^{(c-a)t/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}\sin k\pi\sqrt{b}\,\frac{t}{l}\,\sin k\pi\frac{x}{l}\int_0^l \varphi_0(\xi)\sin k\pi\frac{\xi}{l}\,d\xi$$

и заменим его суммой равной

$$\frac{1}{2}\left[b\, I(x)\right]^{-\frac{1}{2}} e^{(c-a)t/2}\left\{\varphi_1(x,t)+\varphi_2(x,t)\right\},$$

где

$$\varphi_1(x,t)=\varphi_0(\xi),\quad \xi=(-1)^m(x+\sqrt{b}\,t-ml)+\tfrac{1}{2}\left[1+(-1)^{m-1}\right]l,$$

если $ml\le x+\sqrt{b}\,t\le(m+1)l,\quad m=0,1,2,\ldots;$

$$\varphi_2(x,t)=\varphi_0(\eta),\quad \eta=(-1)^i(\sqrt{b}\,t-x-il)+\tfrac{1}{2}\left[1+(-1)^{i-1}\right]l,$$

если $il\le\sqrt{b}\,t-x\le(i+1)l,\quad i=0,1,2,\ldots,$

$$\varphi_0(x)=\frac{d}{dx}\left\{\sqrt{I(x)}\,\frac{d^2}{dx^2}\left[\varphi_1(x)+c\varphi_0(x)\right]\right\}.$$

При $0\le x\le l$, $t\ge 0$ и точек, не лежащих на прямых (II), (I2), частная производная $\frac{d^5 y}{dx^4 dt}$ может быть вычислена почленным дифференцированием ряда для $\frac{d^4 y}{dx^4}$ полученного после указанных преобразований.

Аналогично могут быть рассмотрены частные производные $\frac{\partial^5 y}{\partial x^2\partial t\partial x^2}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x^3\partial t\partial x}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x\partial t\partial x^3}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^4}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x\partial t^3\partial x}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial t^3\partial x^2}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x\partial t^2\partial x\partial t}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x\partial t\partial x\partial t^2}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x\partial t\partial x\partial t}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x^2\partial t^3}$.

Литература

I. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. М., "Наука", 1970.

2. Крицкая С.С. Математическое рассмотрение задачи о поперечных колебаниях стержня со свободно опертыми концами с учетом инерции вращения. - В сб.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск, ДГУ, 1972, вып.3, с.139-142.