УДК 517. 9

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНОМ КОЛЕБАНИИ НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА РЕЛАКСАЦИИ И ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ

С.С.Крицкая

Как известно, уравнение продольных колебаний стержня для случая активной деформации имеет вид [I]

$$\frac{\partial}{\partial x}(\omega\sigma)=\omega\rho\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad (\mathrm{I})$$

где $\omega=\omega(x)$ – площадь поперечного сечения стержня; ρ – плотность вещества; $v=\frac{\partial u}{\partial t}$ – скорость смещения $u=u(x,t)$ сечений стержня; $\sigma=\sigma(x,t)$ – нормальное напряжение.

Если материал стержня обладает свойствами релаксации и последействия, то зависимость между деформацией $\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial x}$ и напряжением задается уравнением [2].

$$E\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{\mu}{E}(\sigma-E_1\varepsilon), \qquad (2)$$

где $E=E(x)$ – модуль упругости; $\mu=\mu(x)$ коэффициент вязкости; $E_1=E_1(x)$ – модуль упрочнения.

Предположим, что $E(x)=E_0\varphi(x)$, $E_1(x)=E_1^0\varphi(x)$, $\mu(x)=\mu_0\varphi(x)$, где μ_0, E_0, E_1^0-const, а функции $\varphi(x)$ и $\omega(x)$ имеют непрерывные производные четвертого порядка с полной ограниченной вариацией для $0\le x\le l$.

Рассмотрим вопрос о распространении волн в стержне длины l для случая, когда к левому концу стержня прикреплен груз массы m_1, а правый, вначале свободный, подвергается удару грузом массы m_2.

Граничные условия в этом случае следующие:

$$\omega(0)\sigma(0,t)=m_1\frac{\partial v(0,t)}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\omega(l)\sigma(l,t)=-m_2\frac{\partial v(l,t)}{\partial t}. \tag{4}$$

Начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} &u(x,0)=v(x,0)=v_t'(x,0)=0, \quad \text{если } 0\le x<l,\\ &u(l,0)=v(l,0)+v_0=0, \end{aligned} \tag{5}$$

где v_0 – скорость ударяющего груза.

<u>Теорема.</u> Если функция $f(x)$ имеет непрерывные производные второго порядка для $0\le x\le l$ и $f'(0)=f'(l)=0$, то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на отрезке $[0,l]$ ряд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n X_n(x), \tag{6}$$

где $a_n=\int_0^l \omega(\xi)f(\xi)X_n(\xi)d\xi+\frac{m_1}{\rho}f(0)X_n(0)+\frac{m_2}{\rho}f(l)X_n(l)$,

$X_n(x)$ – собственные функции, соответствующие собственному значению λ_n, краевой задачи

$$\{\varphi(x)\omega(x)X'(x)\}'+\lambda\omega(x)X(x)=0, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\rho\varphi(0)\omega(0)X'(0)+\lambda m_1X(0)=0,\\ &\rho\varphi(l)\omega(l)X'(l)-\lambda m_2X(l)=0, \end{aligned} \tag{8}$$

нормированные условием

$$\int_0^l\omega(\xi)X_n^2(\xi)d\xi+\frac{m_1}{\rho}X_n^2(0)+\frac{m_2}{\rho}X_n^2(l)=1, \tag{9}$$

$$\lambda_0=0,\quad X_0(x)=\sqrt{C},\quad C=\left(\int_0^l\omega(\xi)d\xi+\frac{m_1+m_2}{\rho}\right)^{-1}.$$

Применяя эту теорему к функции

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } 0\le x\le l-2\varepsilon, \\ (x-l+2\varepsilon)^3\varepsilon^{-3}-(x-l+2\varepsilon)^4\varepsilon^{-4}, & \text{если } l-2\varepsilon\le x\le l-\varepsilon, \\ (x-l)^3\varepsilon^{-3}-(x-l)^4\frac{1}{2\varepsilon^4}+1, & \text{если } l-\varepsilon\le x\le l, \end{cases}$$

для $0\le x\le l-2\varepsilon$ и при $x=l$. Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, используя асимптотику для собственных функций из [3], получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(l)X_n(x)=\frac{\rho}{m_2}\left[1+\operatorname{sign}(x-l)\right]-c. \qquad (10)$$

Учитывая эту сумму, получим для смещения, скорости смещения, деформации и напряжения следующие формулы:

$$u(x,t)=\frac{m_2 v_0}{\rho}\left\{-ct+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\psi_n(t)X_n(x)X_n(l)\right\}, \qquad (11)$$

$$v(x,t)=\frac{m_2 v_0}{\rho}\left\{-c+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\psi_n'(t)X_n(x)X_n(l)\right\}, \qquad (12)$$

$$\varepsilon(x,t)=\frac{m_2 v_0}{\rho}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\psi_n(t)X_n'(x)X_n(l) \qquad (13)$$

$$\sigma(x,t)=-m_2 v_0 \mathcal{E}(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n}\psi_n''(t)X_n'(x)X_n(l), \qquad (14).$$

где

$$\psi_n(t)=\{(r_{1n}+a)\cos r_{2n}t+b_n\sin r_{2n}t\}e^{-\frac{1}{2}(r_{1n}+a)t}-(r_{1n}+a)e^{r_{1n}t},$$

$$a_n\left(3r_{1n}^2+2ar_{1n}+\lambda_n\frac{E_0}{\rho}\right)=1, \qquad b_n=\frac{1}{2r_{2n}}\left(a^2-3r_{1n}^2-\frac{2E_0}{\rho}\lambda_n\right),$$

r_{1n} – вещественный корень, а ir_{2n} – мнимая часть комплексных корней уравнения $\rho r_n^3+\rho a r_n^2+\lambda_n E_0 r_n+\lambda_n a E_1=0$.

Применяя асимптотику собственных значений и собственных функций краевой задачи (7)–(8), получим, что ряды в формулах

(II)-(I4) сходятся для $0 \le x \le l$, $t \ge 0$; причем функция $u(x,t)$ непрерывна для $t \ge 0, 0 \le x \le l$, а функции $\sigma(x,t), \varepsilon(x,t), v(x,t)$ непрерывны при $t \ge 0, 0 \le x \le l$ для точек, не лежащих на кривых

$$\sqrt{E_o}\, t = \sqrt{\rho}\,[r(x)+(2m-1)l], \quad m=0,1,2,\dots, \tag{I5}$$

$$\sqrt{E_o}\, t = \sqrt{\rho}\,[(2m-1)l - r(x)], \quad m=0,1,2,\dots, \tag{I6}$$

где
$$r(x) = \frac{1}{h}\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}, \quad h = \int_0^l \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}.$$

Эти кривые являются фронтом прерывных волн.

При $t \ge 0, 0 \le x \le l$ для точек, не лежащих на фронте (I5)-(I6), частные производные $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ непрерывны. Для их вычисления выделяем из ряда, стоящего в (I2), ряд

$$R_1(x,t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cos k\pi \sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{t}{l} \sin\frac{k\pi}{l} r(x),$$

где
$$R_1(x,t) = \frac{m_2 v_o}{\rho} S(x) s(l) \varphi_1(l) e^{c_o t}, \quad c_o = \frac{a}{2E_o}(E_1^0 - E_o),$$

а $S(x), \varphi_1(x)$ определены в [3] . Заменяем этот ряд для точек, не лежащих на фронте (I5)-(I6), суммой равной

$$R_1(x,t)\left\{\operatorname{arctg} \operatorname{tg}\frac{\pi}{2l}\left[\sqrt{\frac{E_o}{\rho}}t - r(x)\right] - \operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2l}\left[\sqrt{\frac{E}{\rho}}t + r(x)\right]\right. .$$

Полученный после таких преобразований ряд для $v(x,t)$ можно почленно дифференцировать по t и x для точек, не лежащих на фронте (I5) -(I6).

Аналогично вычисляются частные производные $\frac{\partial\sigma}{\partial t}, \frac{\partial\sigma}{\partial x}, \frac{\partial\varepsilon}{\partial x}$.

Если $0 \le x \le l$, $t \ge 0$, то для точек, не лежащих на фронте (I5), (I6), тождественно выполняются уравнения (I), (2). При $t \ne \sqrt{\frac{\rho}{E_o}}(2m-1)l$, $m=0,1,\dots$ выполняется граничное условие (3), а при $t \ne \sqrt{\frac{\rho}{E_o}}\, 2ml$ - граничное условие (4).

Если $t \to 0$, то $u(x,t) \to 0$ при $0 \le x \le l$, $v(x,t) \to 0$, при $0 \le x \le l$, $v'_t(x,t) \to 0$ при $0 \le x < l$.

Обозначим $\sigma^+, \varepsilon^+, v^+$ и $\sigma^-, \varepsilon^-, v^-$ значения напряжения, деформации и скорости смещения, к которым стремятся эти величины при приближении к фронту соответственно со стороны $t > \sqrt{\frac{\rho}{E_0}}\left[\pm r(x) + (2m-1)l\right]$ и $t < \sqrt{\frac{\rho}{E_0}}\left[\pm r(x) + (2m-1)l\right]$. Разности этих значений будем обозначать $[\sigma] = \sigma^+ - \sigma^-$, $[\varepsilon] = \varepsilon^+ - \varepsilon^-$, $[v] = v^+ - v^-$.

Имеем

$$[\sigma] = -\frac{1}{2}\pi E_0 \varphi(x) R_2(x,t); \quad [\varepsilon] = -\frac{1}{2}\pi R_2(x,t);$$

$$[v] = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi R_1(x,t) \text{ на фронте (15);} \\ -\frac{1}{2}\pi R_1(x,t) \text{ на фронте (16);} \end{cases}$$

где

$$R_2(x,t) = \sqrt{\frac{\rho}{E_0}} \frac{l}{\pi} r'(x) R_1(x,t).$$

Литература

1. Шапиро Г.С. Продольные колебания стержней. -"Прикладная математика и механика", 1946, т.10, вып.5-6, с.597-616.

2. Ишлинский А.Ю. Продольные колебания стержня при наличии линейного закона релаксации и последствия.-"Прикладная механика". 1940, т.4, вып.1.

3. Крицкая С.С. Математическое исследование задачи о продольном ударе неоднородного стержня переменного сечения.- В сб.:Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск, ДГУ, 1974, вып.5, с.170-175.