УДК 519.3

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПОКРЫТИЯ ГРАФА НЕОДНОРОДНЫМИ ЦЕПЯМИ

Н.А.Лихолат

Проектирование многих технических устройств часто приводит к задачам покрытия графа цепями, удовлетворяющими некоторым ограничениям. Среди этих задач можно выделить те, у которых за критерий оптимальности принимается минимум мощности покрытия. Практическая реализация алгоритмов решения задач покрытия однородными цепями [I, 2] показывает, что не во всех цепях используются полностью допустимые для них возможности. Поэтому целесообразно рассмотреть задачу покрытия графа неоднородными цепями.

Пусть конечный связный граф G задан множеством вершин $X=\{X_i\}$ $i=1,2,\dots N$, множеством ребер $U=\{U_{ij}\}$, $i,j=1,2,\dots N$ и m матрицами $P^\beta=\|\rho_{ij}^\beta\|$, $\beta=1,2,\dots m$ весов ребер U_{ij} инцидентных вершинам X_i и X_j, $i,j=1,2,\dots N$, причем $\rho_{ii}^\beta=\infty$, $i=1,2,\dots N$. Граф G необходимо покрыть множеством

$$Q=\{Q_k^{l_\beta}\},\ k=1,2,\dots m(Q);\quad \beta=1,2,\dots m$$

неоднородных простых цепей; где l_β – длина цепи типа β, $m(Q)$ – число цепей в множестве Q, каждой из цепей соответствует множество вершин

$$Y^{Q_k^{l_\beta}}=\{y_\alpha^{Q_k^{l_\beta}}\},$$

$$y_\alpha^{Q_k^{l_\beta}}\in X,\quad \alpha=0,1,2,\dots,l_\beta.$$

На цепи множества Q накладываются ограничения: длина каждой из цепей типа β не превосходит некоторого целого числа M_β :

$$0 \leq l_\beta \leq M_\beta \tag{1}$$

суммарный вес ребер, составляющих каждую цепь типа β не превосходит некоторого постоянного числа L_β

$$\sum_{i \in Y^{Q_k^{l_\beta}} \setminus Y_{l_\beta}^{Q_k^{l_\beta}}} p_{i,i+1} \leq L_\beta, \quad \beta = 1,2,\dots m, \tag{2}$$

$$Y^{Q_{k_1}^{l_{\beta_1}}} \cap Y^{Q_{k_2}^{l_{\beta_2}}} = \varnothing,$$

$$k_1, k_2 = 1,2,\dots,\mathcal{M}(Q), \quad k_1 \neq k_2, \quad \beta_1, \beta_2 = 1,2,\dots,m, \quad \beta_1 \neq \beta_2.$$

Покрытие необходимо осуществить таким образом, чтобы $\mathcal{M}(Q)$ было минимальным.

Существование решения поставленной задачи не вызывает сомнений, однако его отыскание представляет значительную трудность. Тривиальным методом построения решения является метод полного перебора. Но этот метод может быть реализован только для задач небольшой размерности. Одним из путей нахождения решения является сведение к задаче покрытия графа цепями одного типа. С этой целью для цепей каждого типа определим нижнюю границу числа цепей покрывающих граф

$$\mathcal{M}_\beta(Q) = max\{\underline{\mathcal{M}}_\beta^1(Q), \underline{\mathcal{M}}_\beta^2(Q)\}, \quad \beta = 1,2,\dots,m,$$

где

$$\underline{\mathcal{M}}_\beta^1(Q) = \begin{cases} \dfrac{N}{M_\beta+1}, & \text{если} \quad \dfrac{N}{M_\beta+1} = \left[\dfrac{N}{M_\beta+1}\right], \\ \left[\dfrac{N}{M_\beta+1}\right]+1, & \text{если} \quad \dfrac{N}{M_\beta+1} \neq \left[\dfrac{N}{M_\beta+1}\right], \end{cases}$$

$$\mathcal{M}_\beta^2(Q) = \begin{cases} \dfrac{h_\beta}{L_\beta}, & \text{если} \quad \dfrac{h_\beta}{L_\beta} = \left[\dfrac{h_\beta}{L_\beta}\right], \\ \left[\dfrac{h_\beta}{L_\beta}\right]+1, & \text{если} \quad \dfrac{h_\beta}{L_\beta} \neq \left[\dfrac{h_\beta}{L_\beta}\right], \end{cases}$$

h_β - сумма приводящих констант матрицы P^β, полученная в результате $\mathcal{M}_\beta^1(Q)$ приведения матрицы P^β. $\underline{\mathcal{M}}_\beta^1(Q)$ - Bl приведение - это такое приведение матрицы P^{β}, в результате которого в матрице P^{β} по крайней мере $N-m^1_{\beta}(Q)$ строк и столбцов содержат нули. Затем рассмотрим ту матрицу P^{β^*}, для которой

$$m^1_{\beta^*}(Q)=\min_{\beta} m^1_{\beta}(Q).$$

Если таких матриц несколько, то выделим матрицу, для которой допустимы цепи максимальной длины M^{β^*}. Используя для графа G с матрицей P^{β^*} алгоритм, изложенный в работе [I] строим первую цепь $Q^{L^*}_{1,\beta^*}$. Затем проверяем существуют ли цепи типа $\beta=1,2,\dots,\beta^*-1,\beta^*+1,\dots,m$, которые содержат все вершины зафиксированной цепи и кроме того еще и другие вершины графа G. С этой целью для всех матриц кроме матрицы P^{β^*} проверяем существует ли цепь $Q^{L}_{1,\beta}$ такая, что

$$Y Q^{L}_{1,\beta^*}=Y Q^{L}_{1,\beta},$$

$$\sum_{(i,j)\in Q^{L}_{1,\beta}} \rho^{t}_{ij}\le L_{\beta}.$$

Для каждой полученной цепи проверяем существование ребер, которые можно к ней присоединить, не нарушив ограничения (I, 2) Если ни для одного из типов цепей невозможно присоединить ни одно ребро, то в решение включается цепь, полученная для матрицы с минимальным L_{β}. В противном случае рассматриваем ту из них, у которой больше возможных вариантов присоединения При этом вершины, которые можно присоединить к цепи располагаем в порядке возрастания максимальной по β степени. Если сумма вершин вошедших в цепь, и допустимых к присоединению, больше $M_{\beta}+1$, то к вершинам цепи добавляем допустимые, имеющие меньшую степень, но так, чтобы общее число не превосходило $M_{\beta}+1$. Используя I - приведение матрицы, соответствующей выбранным вершинам, проверяем существование цепи, содержащей эти вершины. Если условие существования цепи выполняется, то строим ее, используя алгоритм типа "ветвей и границ" [3] . В противном случае число вершин уменьшаем, исключив допустимую вершину с наибольшей степенью, и вновь проверяем существование цепи. Так используем до тех пор, пока не будет зафиксирована некоторая цепь, удовлетворяющая условиям(1,2) и имеющая длину $l_{\beta_1}^* > l_{\beta_c}^*$. Затем вновь проверяем существуют ли цепи других типов длины $l_{\beta_1}^*$ и имеется ли возможность для этих цепей увеличения длины. Если такая возможность существует, то аналогично изложенному строим цепь длины $l_{\beta_2}^*$. В противном случае цепь длины $l_{\beta_1}^*$ относящуюся к типу с минимальным l_β , включаем в решение, а из матриц F^β исключаем столбцы и строки, соответствующие вершинам, вошедшим в зафиксированную цепь. Для полученных матриц вновь определяем $\mathfrak{M}_\beta(G)$ и, поступая аналогично изложенному, строим последующие цепи.

По предлагаемому алгоритму были проведены расчеты на ЭВМ-ЕС-1022 для 5-х матриц размера 50x50. Время счета не превышало 5 минут.

Литература

1. Макаров Г.Д., Лихолат Н.А. Об одной экстремальной задаче на графах. - В сб.: Вычислительная и прикладная математика. Киев, КГУ, 1977, вып 34.

2. Лихолат Н.А. Об одной задаче покрытия графа множеством минимальной мощности. - В сб.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск, ДГУ, 1976.

3. Литл Дж. и др. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере.-"Экономика и математические методы",1965, I, № I.