Введем теперь (II) в (6) :

$$D\bar{U} = A\bar{V} + A_1 \Pi_1^{-1} B_1 \bar{U} + A_2 \Pi_2^{-1} B_2 \bar{U}$$

или

$$(D - A_1 \Pi_1^{-1} B_1 - A_2 \Pi_2^{-1} B_2)\bar{U} = A\bar{V},$$

откуда

$$\bar{U} = (D - A_1 \Pi_1^{-1} B_1 - A_2 \Pi_2^{-1} B_2)^{-1} A\bar{V}. \qquad (12)$$

Уравнение (I2) является матричным разрешающим уравнением задачи для случая циклического нагружения. По найденному вектору перемещений кольца находятся краевые векторы усилий и перемещений в оболочках для n -ой гармоники по формулам (9) и (I0). Полученные вклады по каждому из параметров напряженно-деформированного состояния суммируются, затем на полученное решение накладывается решение осесимметричной задачи.

Литература

I. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М., Физматгиз, 1959.

2. Львин Я.Б. Сопротивление оболочек вращения краевым циклическим воздействиям.- В сб.: Расчет пространственных конструкций.М., Госстройиздат, 1962, вып.7.

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ,СВЯЗАННОЙ С ПОПЕРЕЧНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ УПРУГО-ВЯЗКО-РЕЛАКСИРУЮЩЕГО СТЕРЖНЯ

Д.И.Рогач

Настоящая работа посвящена исследованию вопроса о поперечных колебаниях упруго-вязко-релаксирующего стержня конечной длины переменного поперечного сечения с переменным моментом инерции при наличии инерции вращения элементов стержня вокруг оси перпендикулярной плоскости колебаний.

Как известно, поперечные колебания стержня в этом случае описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{\mu\gamma}{Eq}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left[I\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\right]+\frac{\gamma}{q}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left[I\frac{\partial^3 y}{\partial x\partial t^2}\right]-\frac{\gamma A\mu}{Eq}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\gamma A}{q}\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}=E\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[I\frac{\partial^3 y}{\partial x^2\partial t}\right]+\frac{\mu E_1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[I\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right], \quad (1)$$

где $y=y(x,t)$ – функция смещения сечений стержня, $A=A(x)$ – площадь поперечного сечения, $I=I(x)$ – момент инерции, E,μ,γ,q,E_1 – некоторые физические постоянные.

Если левый конец стержня закреплен, а правый свободен, то граничные условия имеют вид:

$$y(0,t)=0,\quad \frac{\partial y(0,t)}{\partial x}=0; \quad (2)$$

$$I(l)\left[E\frac{\partial^3 y(l,t)}{\partial x^2\partial t}\right]+\mu E_1/E\,\frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2}=0, \quad (3)$$

$$\frac{I\gamma\mu}{qE}\frac{\partial^3 y}{\partial x\partial t^2}\Big|_{x=l}+\frac{I\gamma}{q}\frac{\partial^4 y}{\partial x\partial t^3}\Big|_{x=l}=E\frac{\partial}{\partial x}\left[I\frac{\partial^3 y}{\partial x^2\partial t}\right]_{x=l}+\frac{\mu E_1}{E}\frac{\partial}{\partial x}\left[I\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]_{x=l} \quad (4)$$

Начальные условия выражаются соотношениями

$$y(x,0)=f_1(x),\quad \frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=f_2(x),\quad \frac{\partial^2 y(x,0)}{\partial t^2}=f_3(x),\ \text{если}\ 0\le x\le l. \quad (5)$$

К решению задачи (1)-(5) применим метод Фурье.

Ищем решение уравнения (1) в виде $y(x,t)=X(x)T(t)$. Для функции $X(x)$ получим краевую задачу

$$[IX'']''+\lambda[(IX')'-AX]=0 \quad (6)$$

$$X(0)=0, \quad X'(0)=0, \tag{7}$$

$$I(l)X''(l)=0, \quad [I(x)X''(x)]'_{|x=l}+\lambda I(l)X'(l)=0, \tag{8}$$

а функция $T(t)$ будет удовлетворять уравнению

$$T'''(t)+\frac{\mu}{E}T''(t)+\lambda\frac{q}{\gamma}ET'(t)+\frac{\lambda\mu q}{E\gamma}E_1T(t)=0. \tag{9}$$

Обозначим через $X_n(x)$ собственные функции краевой задачи (6)-(8), соответствующие собственному значению $\lambda_n=\nu_n^2/l^2$ ($\nu_n>0$), нормированные условием

$$\int_0^l[I(\xi)X_n'^2(\xi)+A(\xi)X_n^2(\xi)]d\xi=1.$$

Для этих собственных функций и собственных значений получены асимптотические формулы в работе [I].

Предположим, что функция $A(x)$ имеет непрерывную вторую производную, а $I(x)$ – непрерывную производную шестого порядка для $0\le x\le l$.

Имеет место следующая теорема разложения.

Теорема. Всякая функция $F(x)$, имеющая непрерывную производную четвертого порядка для $0\le x\le l$ и удовлетворяющая условиям

$$F(0)=0, \quad F'(0)=0, \quad F''(l)=F'''(l)=0, \tag{I0}$$

разлагается в ряд

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l F(\xi)\{A(\xi)X_n(\xi)-[I(\xi)X_n'(\xi)]'\}d\xi\, X_n(x), \tag{II}$$

причем ряд (II) сходится абсолютно и равномерно для $0\le x\le l$.

Будем считать, что функции $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ удовлетворяют условиям этой теоремы.

Продолжая решение задачи (I)-(5) для функции $y(x,t)$ получим ряд

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{(a_{1n}-b_n)e^{-(2r_{1n}+a)t}+$$

$$+e^{r_{1n}t}\left[b_n\cos r_{2n}t+\frac{a_{2n}-3r_{1n}b_n+2r_{1n}a_{1n}+a(a_{1n}-b_n)}{r_{2n}}\sin r_{2n}t\right]\Big\}X_n(x), \qquad (12)$$

где

$$a_{in}=\int_0^l f_i(\xi)\{A(\xi)X_n(\xi)-[I(\xi)X_n'(\xi)]'\}d\xi,\ i=1,2,3;$$

$$b_n=\frac{8r_{1n}^2a_{1n}+6r_{1n}aa_{1n}+2r_{1n}a_{2n}+a^2a_{1n}-a_{3n}}{(3r_{1n}+a)^2+r_{2n}^2},$$

$$r_{1n}=-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\alpha_{1n}+\alpha_{2n}}+\sqrt[3]{\alpha_{1n}-\alpha_{2n}}\right)-\frac{a}{3},\quad r_{2n}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\alpha_{1n}+\alpha_{2n}}-\sqrt[3]{\alpha_{1n}-\alpha_{2n}}\right), \qquad (13)$$

$$\alpha_{1n}=\frac{qa}{\gamma}\frac{E-3E_1}{6}\frac{\nu_n^2}{l^2}-\frac{a^3}{27},\quad \alpha_{2n}=\sqrt{\alpha_{1n}^2+\frac{1}{27}\left(\frac{\nu_n^2}{l^2}\frac{Eq}{\gamma}-\frac{a^2}{3}\right)^3},\quad a=\frac{\mu}{E}.$$

Асимптотические формулы для r_{1n}, r_{2n} следующие:

$$r_{1n}=\frac{a}{3}-\frac{3}{2}\frac{aE_1}{E}+O\left(\frac{1}{\nu_n^2}\right),\quad r_{2n}=\sqrt{\delta}\frac{\nu_n}{l}+O\left(\frac{1}{\nu_n}\right),\quad \delta=\frac{qE}{\gamma}.$$

Члены ряда (12) имеют порядок $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ для $0\le x\le l,\ t\ge 0$. Следовательно, $y(x,t)$ определенная по формуле (12), непрерывна по обеим переменным x и t и имеет непрерывные частные производные I-го и II-го порядков и для их вычисления можно почленно дифференцировать ряд (12).

Для исследования частных производных высших порядков удобно представить $y(x,t)$ в виде

$$y(x,t)=y_1(x,t)+y_2(x,t)+y_3(x,t)+y_4(x,t),$$

где

$$y_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{1n}-b_{1n})e^{-(2r_{1n}+a)t}X_n(x), \qquad (14)$$

$$y_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n}+(2r_{1n}+a)a_{1n}}{r_{2n}}e^{r_{1n}t}\sin r_{2n}t\,X_n(x), \qquad (15)$$

$$y_3(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_ne^{r_{1n}t}\cos r_{2n}t\,X_n(x), \qquad (16)$$

$$y_4(x,t)=-\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{(3r_{1n}+a)}{r_{2n}}e^{r_{1n}t}\sin r_{2n}t\,X_n(x). \qquad (17)$$

Применяя дважды интегрирование по частям и учитывая граничные условия (7),(8), а также то, что $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ удовлетворяют условиям (10), из формул (13) получим

$$a_{1n}=\frac{l^2}{\nu_n^2}\int_0^l\left[I(\xi)f_1''(\xi)\right]''X_n(\xi)d\xi, \tag{18}$$

$$a_{2n}=\frac{l^2}{\nu_n^2}\int_0^l\left[I(\xi)f_2''(\xi)\right]''X_n(\xi)d\xi, \tag{19}$$

$$a_{3n}=\frac{l^2}{\nu_n^2}\int_0^l\left[I(\xi)f_3''(\xi)\right]''X_n(\xi)d\xi. \tag{20}$$

Перейдем к исследованию частных производных.

1. Функция $y_1(x,t)$ для $0\le x\le l$, $t\ge 0$ имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial^3 y_1}{\partial t^3},\ \frac{\partial^3 y_1}{\partial t^2 \partial x},\ \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^2\partial t},\ \frac{\partial^4 y_1}{\partial x\partial t^3},\ \frac{\partial^4 y_1}{\partial t^2\partial x^2},\ \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^2\partial t^2}$$

их можно получить почленным дифференцированием ряда (14).

Для вычисления частных производных $\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4}$ из ряда для $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}$, полученного почленным дифференцированием ряда (14), выделим ряд

$$e^{\left(\frac{2}{3}-\frac{E_1}{E}\right)at}\int_0^l\left[I(\xi)f_1''(\xi)\right]''\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(\xi)X_n''(x)}{\lambda_n}d\xi$$

и заменим его суммой равной

$$e^{\left(\frac{2}{3}-\frac{E_1}{E}\right)at}\int_0^l\left[I(\xi)f_1''(\xi)\right]''\frac{\xi-x}{I(x)}d\xi.$$

После этого частные производные $\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4}$ для $0\le x\le l$, $t\ge 0$ могут быть получены почленным дифференцированием вновь полученного ряда. Эти производные будут непрерывными для $t\ge 0$ $0\le x\le l$.

Аналогично вычисляются частные производные $\frac{\partial^4 y}{\partial x^3\partial t}$, $\frac{\partial^5 y_1}{\partial x^4\partial t}$, причем они непрерывны в области $0\le x\le l$, $t\ge 0$ и выполняются равенства

$$\frac{\partial^4 y_1}{\partial x^3 \partial t}=\frac{\partial^4 y_1}{\partial x^2 \partial t \partial x}=\frac{\partial^4 y_1}{\partial t \partial x^3}=\frac{\partial^4 y_1}{\partial x \partial t \partial x^2};\quad \frac{\partial^5 y_1}{\partial x^4 \partial t}=\frac{\partial^5 y_1}{\partial x \partial t \partial x^3}=\frac{\partial^5 y_1}{\partial t \partial x^4}=\frac{\partial^5 y_1}{\partial x^3 \partial t \partial x^2}=\frac{\partial^5 y_1}{\partial x^3 \partial t \partial x}$$

II. Для $0 \le x \le l$, $t \ge 0$ функция $y_2(x,t)$ имеет непрерывные частные производные III-го порядка; $y_3(x,t)$ – 4-го порядка; $y_4(x,t)$ – 5-го порядка и для их вычисления можно почленно дифференцировать ряды (I5), (I6) и (I7) соответственно.

III. Для вычисления частных производных $\frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4}, \frac{\partial^5 y_2}{\partial x^4 \partial t}, \frac{\partial^5 y_2}{\partial x^3 \partial t^2}$ преобразуем $\frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3}$ следующим образом.

Из $\frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3}$, полученной почленным дифференцированием ряда (I5), выделим ряд

$$\sqrt{\frac{2}{l I(x)}}\,\frac{4l}{\pi^2\sqrt{\delta}}\,e^{-(\frac{1}{3}-\frac{3E_1}{E})at}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi\sqrt{\delta}}{2l}(2n+1)t\,\sin\frac{\pi}{2l}(2n+1)x}{(2n+1)^2}\times$$

$$\times\int_0^l \left\{I\left[f_2-\left(\frac{1}{3}-\frac{3E_1}{E}\right)af_1\right]''\right\}''\cos\frac{\pi\xi}{2l}(2n+1)\,d\xi$$

и заменим его суммой равной

$$\sqrt{\frac{2}{l I(x)}}\,\frac{1}{\sqrt{\delta}}\,e^{-(\frac{1}{3}-\frac{3E_1}{E})at}\,\Phi(x,t),$$

где
$$\Phi(x,t)=-(-1)^{[\frac{n-1}{2}]}\left\{\frac{[1+(-1)^n][1+(-1)^{[\frac{n}{2}]}]}{4}\,\mathrm{sgn}\left(\frac{l}{2}-x\right)+\frac{[1+(-1)^n][1-(-1)^{[\frac{n}{2}]}]}{4}+\right.$$
$$\left.+\frac{1-(-1)^n}{2}\right\}(If_4'')_{\xi=\xi_1}+(-1)^{[\frac{n+1}{4}]}\left\{\frac{[1+(-1)^n][1-(-1)^{[\frac{n}{2}]}]}{4}\,\mathrm{sgn}\left(\frac{l}{2}-x\right)-\frac{[1+(-1)^n][1+(-1)^{[\frac{n}{2}]}]}{4}-\right.$$
$$\left.-\frac{1-(-1)^n}{2}\right\}(If_4'')_{\xi=\xi_2}-(-1)^{[\frac{n+1}{4}]}\frac{1}{2}(If_4'')'_{\xi=0}\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}+\frac{[1+(-1)^n][1-(-1)^{[\frac{n}{2}]}]}{4}\,\mathrm{sgn}\left(\frac{l}{2}-x\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{[1+(-1)^{[\frac{n}{2}]}][1+(-1)^n]}{4}\right\}\left\{x\left[(1+(-1)^n)\left(1-\mathrm{sgn}\left(x-\frac{l}{2}\right)\right)+(1+(-1)^{n-1})(1+(-1)^{[\frac{n}{2}]})\right]+\left(at+\right.\right.$$
$$\left.\left.+2\left[\frac{n+2}{4}\right]l\right)\left[(1+(-1)^n)\left(1+\mathrm{sgn}\left(x-\frac{l}{2}\right)\right)+(1+(-1)^{n-1})(1-(-1)^{[\frac{n}{2}]})\right]\right\},$$

если $\left[\frac{n+1}{2}\right]l+(-1)^n\left[\frac{l}{2}-|x-\frac{l}{2}|\right]\le at\le\left[\frac{n+1}{2}\right]l+\frac{l}{2}+(-1)^n|x-\frac{l}{2}|$,

где $f_4=f_2-(\frac{1}{3}-\frac{3E_1}{E})af_1$, $\xi_1=(-1)^{[\frac{n+1}{2}]}\frac{1}{2}\left\{[1-(-1)^{n-1}]\,\mathrm{sgn}(\frac{l}{2}-x)+[1+(-1)^{n-1}]\right\}\times$
$\left\{x+at-2\left[\frac{n}{4}\right]l-2l+\frac{l}{4}\left[1-\mathrm{sgn}(x-\frac{l}{2})\right]\left[1+(-1)^n\right]\left[1+(-1)^{[\frac{n}{2}]}\right]\right\}$, $n=0,1,2,\dots$.

Частные производные $\frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^3 \partial t}, \frac{\partial^5 y_2}{\partial x^4 \partial t}, \frac{\partial^5 y_2}{\partial x^3 \partial t^2}$ непрерывны по обеим переменным в области $0 \le x \le l$, $t \ge 0$ за исключением семейств прямых

$$x \pm \sqrt{\varepsilon}\, t = (4n-1) l, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (31)$$

и для их вычисления можно почленно дифференцировать преобразованный указанным выше способом ряд для $\frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3}$.

IУ. Выделим из ряда для $\frac{\partial^3 y_2}{\partial x^2 \partial t}$ ряд

$$-\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2}{l I(x)}}\, e^{-\left(\frac{1}{3}-\frac{3E_1}{E}\right)at} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi\sqrt{\varepsilon}}{2l}(2n+1)t \cos \frac{\pi}{2l}(2n+1)x}{(2n+1)^2} \times$$

$$\times \int_0^l \left\{ I\left[f_2 - \left(\frac{1}{3}-\frac{3E_1}{E}\right)af_1\right]'' \right\}'' \cos \frac{\pi\xi}{2l}(2n+1)\xi \, d\xi$$

и заменим его суммой равной

$$-\frac{1}{l}\sqrt{\frac{2}{l I(x)}}\, e^{-\left(\frac{1}{3}-\frac{3E_1}{E}\right)at}\, \Psi(x,t),$$

где
$$\Psi(x,t) = (-1)^{\left[\frac{n-1}{4}\right]} \left\{ \frac{[1+(-1)^n][1+(-1)^{[\frac{n}{2}]}]}{4} \operatorname{sgn}\left(\frac{l}{2}-x\right) + \frac{[1+(-1)^n][1-(-1)^{[\frac{1}{2}]}]}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-(-1)^n}{2} \right\} (I f_4'')_{\xi=\xi_1} + (-1)^{\left[\frac{n+1}{4}\right]} \left\{ \frac{[1+(-1)^n][1-(-1)^{[\frac{n}{2}]}]}{4} \operatorname{sgn}\left(\frac{l}{2}-x\right) - \frac{[1+(-1)^n][1+(-1)^{[\frac{n}{2}]}]}{4} - \right.$$

$$\left. - \frac{1-(-1)^n}{2} \right\} (I f_4'')_{\xi=\xi_2} + (-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{1}{2} (I f_4'')'_{\xi=0} \left\{ \frac{1-(-1)^n}{2} + \frac{[1+(-1)^n][1-(-1)^{[\frac{n}{2}]}]}{4} \operatorname{sgn}\left(\frac{l}{2}-x\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{[1+(-1)^{[\frac{n}{2}]}][1+(-1)^n]}{4} \right\} \left\{ (x-l)\left[(1+(-1)^n)\left(1+\operatorname{sgn}\left(x-\frac{l}{2}\right)\right) + (1+(-1)^n)\left(1-(-1)^{[\frac{n}{2}]}\right) \right] + \right.$$

$$\left. + \left(at - l - 2\left[\frac{n}{4}\right]l\right) \left[(1+(-1)^n)\left(1-\operatorname{sgn}\left(x-\frac{l}{2}\right)\right) + (1+(-1)^{n-1})\left(1+(-1)^{[\frac{n}{2}]}\right) \right] \right\},$$

если
$$\left[\frac{n+1}{2}\right] l + (-1)^n \left[\frac{l}{2} - \left|x-\frac{l}{2}\right|\right] \le at \le \left[\frac{n+1}{2}\right] l + \frac{l}{2} + (-1)^n \left|x - \frac{l}{2}\right|,$$

где
$$\xi_2 = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{2} \left\{ [1+(-1)^n] \operatorname{sgn}\left(\frac{l}{2}-x\right) + [1+(-1)^{n-1}] \right\} \left\{ -x + at - \right.$$

$$\left. - 2\left[\frac{n+1}{4}\right] l - \frac{l}{4}\left[1-\operatorname{sgn}\left(x-\frac{l}{2}\right)\right][1+(-1)^n][1-(-1)^{[\frac{n}{2}]}] \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Тогда для вычисления частных производных $\frac{\partial^4 y_2}{\partial x^2 \partial t^2}, \frac{\partial^5 y_2}{\partial x^3 \partial t^2}, \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^2 \partial t \partial x}, \frac{\partial^5 y_2}{\partial x^2 \partial t \partial x^2}, \frac{\partial^5 y_2}{\partial t^2 \partial x^3}$ для $0 \le x \le l$, $t \ge 0$ можно почленно дифференцировать полученный таким образом ряд для $\frac{\partial^3 y_2}{\partial x^2 \partial t}$. Эти производные будут непрерывными в указанной области за исключением семейств прямых (2I).

Аналогично вычисляются частные производные $\frac{\partial^4 y_3}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 y_3}{\partial x^2 \partial t^2}$, $\frac{\partial^4 y_3}{\partial x^3 \partial t}$, $\frac{\partial^5 y_3}{\partial x^4 \partial t}$, $\frac{\partial^5 y_2}{\partial x^2 \partial t^3}$.

Литература

I. Крицкая С.С., Рогач Д.И. О решении одной линейной задачи. - В сб.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск, ДГУ, 1972.

УДК 624.07

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ И КАРТА УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ПРИВОДЯЩЕЙСЯ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

В.М.Шевченко, В.О.Семенов

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами второго порядка, имеющую вид

$$\begin{aligned} &\psi_1'' + (1+h\cos pt)(a_{11}\psi_1 + a_{12}\psi_2) = 0, \\ &\psi_2'' + (1+h\cos pt)(a_{21}\psi_1 + a_{22}\psi_2) = 0. \end{aligned} \tag{I}$$

Здесь $h < 1$.

Умножая второе уравнение на некоторое число λ и складывая