производные будут непрерывными в указанной области за исключением семейств прямых (21).

Аналогично вычисляются частные производные $\frac{\partial^4 y_3}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 y_3}{\partial x^2 \partial t^2}$, $\frac{\partial^4 y_3}{\partial x^3 \partial t}$, $\frac{\partial^5 y_3}{\partial x^4 \partial t}$, $\frac{\partial^5 y_2}{\partial x^2 \partial t^3}$.

Литература

1. Крицкая С.С., Рогач Д.И. О решении одной линейной задачи. – В сб.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск, ДГУ, 1972.

УДК 624.07

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ И КАРТА УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ПРИВОДЯЩЕЙСЯ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

В.М.Шевченко, В.О.Семенов

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами второго порядка, имеющую вид

$$\begin{aligned} &\psi_1'' + (1+h\cos pt)(a_{11}\psi_1 + a_{12}\psi_2) = 0, \\ &\psi_2'' + (1+h\cos pt)(a_{21}\psi_1 + a_{22}\psi_2) = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $h < 1$.

Умножая второе уравнение на некоторое число λ и складывая с первым, получим:

$$\left(\psi_1''+\lambda\psi_2''\right)+\left(a_{11}+\lambda a_{21}\right)\left(1+h\cos pt\right)\left(\psi_1+\frac{a_{12}+\lambda a_{22}}{a_{11}-\lambda a_{21}}\psi_2\right)=0 \qquad (2)$$

Подбираем число λ так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{a_{12}+\lambda a_{22}}{a_{11}-\lambda a_{21}}=\lambda$$

Для определения λ получим квадратное уравнение

$$a_{21}\lambda^2+(a_{11}-a_{22})\lambda-a_{12}=0,$$

из которого

$$\lambda_{1,2}=(2a_{12})^{-1}\left(-a_{11}+a_{22}\pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}}\right). \qquad (3)$$

Предполагается, что $\lambda_1\neq\lambda_2$. Это значит, что рассматриваемая система не имеет кратных частот. Подставляя полученные значения λ_1 и λ_2 поочередно в (2) получим

$$\left.\begin{aligned}&(\psi_1''+\lambda_1\psi_2'')+(a_{11}+\lambda_1 a_{21})(1+h\cos pt)(\psi_1+\lambda_1\psi_2)=0,\\&(\psi_2''+\lambda_2\psi_2'')+(a_{11}+\lambda_2 a_{21})(1+h\cos pt)(\psi_1+\lambda_2\psi_2)=0\end{aligned}\right\}.$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned}&\Phi_1=\psi_1+\lambda_1\psi_2\,;\quad \Phi_2=\psi_1+\lambda_2\psi_2\,;\\&\omega_1^2=a_{11}+\lambda_1 a_{21},\quad \omega_2^2=a_{11}+\lambda_2 a_{21},\end{aligned} \qquad (4)$$

приходим к системе независимых друг от друга дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами вида

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_1''+\omega_1^2(1+h\cos pt)\,\Phi_1=0,\\&\Phi_2''+\omega_2^2(1+h\cos pt)\,\Phi_2=0.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Решение каждого из уравнений (5) в первом приближении, согласно схемы компенсации поправок [2] представится в виде

$$\Phi_1=A_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+\frac{A_1\omega_1 h}{\sqrt[4]{1+h\cos pt}}\int_0^t\frac{\cos p\tau\cos\omega_1\tau\sin\varphi_1(t,\tau)}{\sqrt[4]{1+h\cos p\tau}}d\tau, \qquad (6)$$

$$\Phi_2 = A_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2) + \frac{A_2\omega_2 h}{\sqrt[4]{1+h\cos pt}}\int_0^t \frac{\cos p\tau\cos\omega_2\tau\sin\varphi_2(t,\tau)}{\sqrt[4]{1+h\cos p\tau}}\,d\tau. \qquad (7)$$

Возвращаемся к старым переменным ψ_1 и ψ_2. Из (4) находим, что

$$\psi_1 = \frac{\lambda_1\Phi_2-\lambda_2\Phi_1}{\lambda_1-\lambda_2}, \qquad \psi_2 = \frac{\Phi_1-\Phi_2}{\lambda_1-\lambda_2}. \qquad (8)$$

Решение системы (I) в первом приближении представится как:

$$\psi_1 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\Big\{\lambda_1 A_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2) - \lambda_2 A_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1) +$$

$$+\frac{h(\lambda_1 A_2\omega_2-\lambda_2 A_1\omega_1)}{\sqrt[4]{1+h\cos pt}}\int_0^t \frac{\cos p\tau[\cos\omega_2\tau\sin\varphi_2(t,\tau)-\cos\omega_1\tau\sin\varphi_1(t,\tau)]}{\sqrt[4]{1+h\cos p\tau}}\,d\tau\Big\}; \qquad (9)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\Big\{A_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1) - A_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2) +$$

$$+\frac{h(A_1\omega_1-A_2\omega_2)}{\sqrt[4]{1+h\cos pt}}\int_0^t \frac{\cos p\tau[\cos\omega_1\tau\sin\varphi_1(t,\tau)-\cos\omega_2\tau\sin\varphi_2(t,\tau)]}{\sqrt[4]{1+h\cos p\tau}}\,d\tau\Big\}. \qquad (10)$$

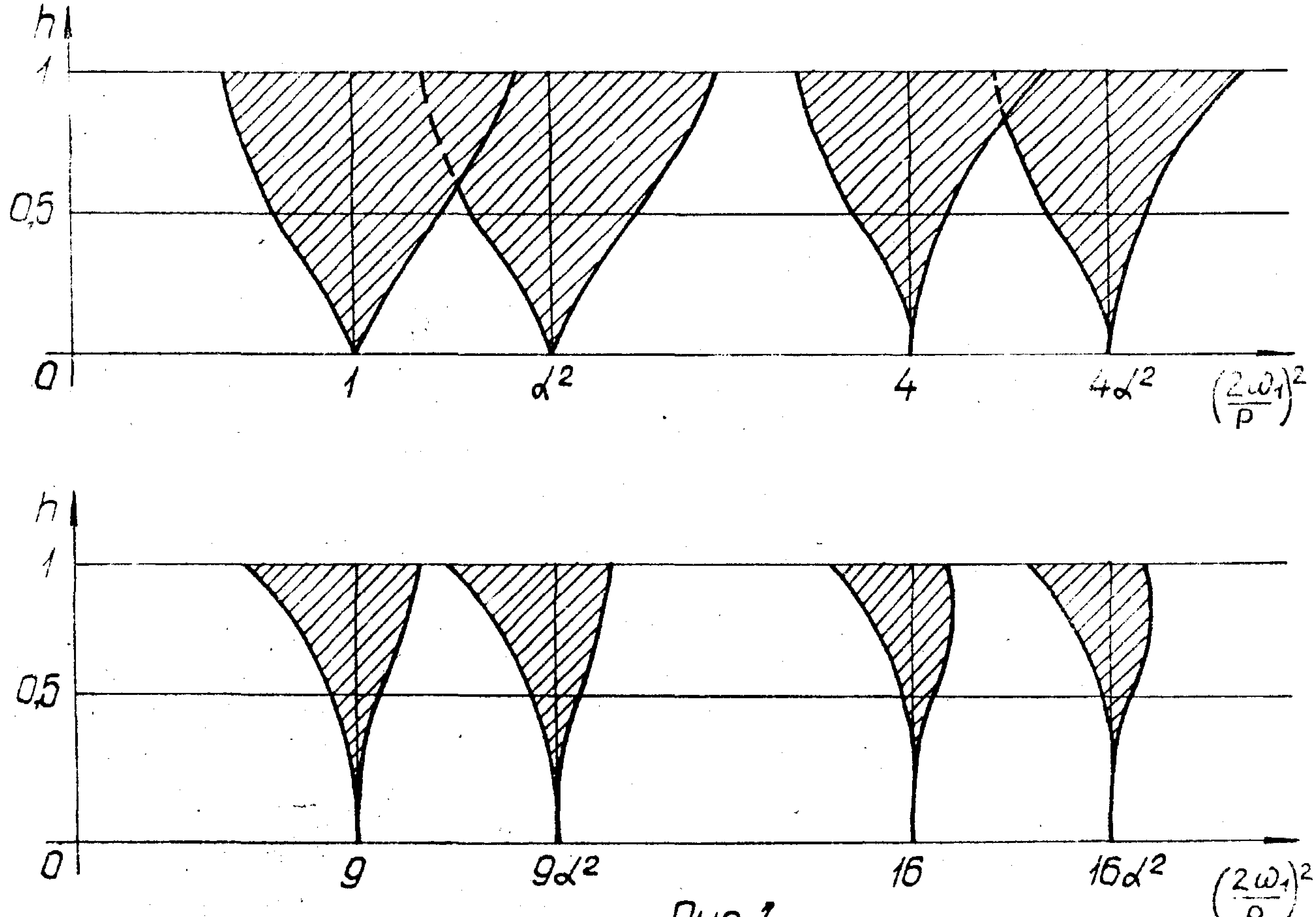
Возвратимся к системе (5) и построим карту устойчивости этой системы. Для каждого уравнения системы (5), применяя схему компенсации поправок, можно построить карту областей неустойчивости типа карты Айнса-Стретта в системе параметров $\left[\left(\frac{2\omega_1}{p}\right)^2, h\right]$ и $\left[\left(\frac{2\omega_2}{p}\right)^2, h\right]$ при малых значениях параметра h.

Построим карту областей неустойчивости в одной системе параметров.

Предположим, что $\omega_1 > \omega_2$, тогда $\omega_1 = \alpha\omega_2$, где $\alpha > 1$.

Имеем: $$\left(\frac{2\omega_2}{p}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{2\omega_1}{p}\right)^2; \quad \left(\frac{2\omega_1}{p}\right)^2 = \alpha^2\left(\frac{2\omega_2}{p}\right)^2.$$

Карта устойчивости для системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (5) в плоскости параметров $\left[\left(\frac{2\omega_1}{p}\right)^2, h\right]$ изображена на рис. I.



h
1
0,5
0
1
α^2
4
$4\alpha^2$
$\left(\frac{2\omega_1}{p}\right)^2$
h
1
0,5
0
9
$9\alpha^2$
16
$16\alpha^2$
$\left(\frac{2\omega_1}{p}\right)^2$

Рис. 1.

Таким образом для системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами четвертого порядка вида (5) карта устойчивости получается путем наложения карт устойчивости каждого уравнения из системы (5) со сдвигом на α^2. Следовательно, для системы второго порядка вида (5) число областей одного порядка удваивается, то есть областей первого порядка – 2, второго порядка – 2 и т.д.

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
2. Горошко О.А., Шевченко В.М. Построение алгоритма для приближенных решений уравнений с переменными коэффициентами, основанного на схеме компенсации поправок.– В сб.: Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний. К., ИМ АН УССР, 1971.
3. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. М.–Л., Госэнергоиздат, 1962.
4. Шевченко В.М. О первом приближении решения уравнения с периодическими коэффициентами построенного по схеме компенсации поправок. – В сб.: Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний. К., ИМ АН УССР, 1971.