3. Лигун А.А., Сторчай В.Ф. О наилучшем выборе узлов при приближении функций локальными эрмитовыми оплайнами // УМЖ. 1980. Т. 32, № 6.
4. Лигун А.А., Шумейко А.А. Об оптимальном выборе узлов при приближении функций двумерными оплайнами// Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск, 1982.

УДК 517. 512

Л.Г.Бойцун, А.И.Халюзова

## ОБ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ С МНОЖИТЕЛЯМИ

I. Пусть функция $f(u)$ интегрируема на каждом конечном промежутке начиная с нуля и $S(t)=\int_0^t f(u)\,du$ . Пусть

$$\tau(y)=\int_0^y a(y,t)\,S(t)\,dt.$$

Говорят, что $\int_0^\infty f(u)\,du$ абсолютно суммируется функциональным методом $T=(a(y,t))$ или суммируем $|T|$ , если

$$\int_0^\infty |\tau'(y)|\,dy<\infty.$$

Если

$$a(y,t)=\begin{cases}\dfrac{P(y-t)}{\mathcal{P}(y)}, & t\le y,\\ 0, & t>y,\end{cases}$$

где $\mathcal{P}(y)=\int_0^y p(t)\,dt$ , тогда мы имеем дело с функциональным методом Г.Ф.Вороного [I]. Аналогично, если

$$a(y,t)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{y}\left(1-\dfrac{t}{y}\right)^{\alpha-1}, & t\le y,\\ 0, & t>y,\end{cases}$$

тогда мы имеем дело с $(C,\alpha)$ -методом, $\alpha>0$ .

Пусть $f(t)\in L_{(-\infty,\infty)}$, её интеграл Фурье [2]

$$f(t)\sim\int_0^\infty [a(y)\cos yt+b(y)\sin yt]\,dy=\int_0^\infty B(y,t)\,dy.$$

Мы будем рассматривать вопрос об абсолютной суммируемости $\int_0^\infty \mu(y) B(y,t)dy$ , где $\mu(y)$ - некоторая фучкция, называемая множителем интеграла Фурье.

Положим

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t)\}$$

и $A(y,u)=\int_u^y a(y,z)dz$ о $A(y,0)=1$ для $y>0$ .

Доказывается следующая теорема.

Теорема. Если

$$\int_0^\infty F(1/z)|d\varphi| \cdot \infty,$$

то да $\int_0^\infty F(y) B(y,\alpha) dy$ $|\Pi|$-суммируем при условии, что $a(y,t)$ -неотрицательная, неубывающая относительно $t\in[0,y]$ , дифференцируемая по обеим переменным функция и $-\left(a'_y(y,t)+a'_t(y,t)\right)$ - неотрицательная, неубывающая функция относительно $t\in[0,y]$ , $a'_t(y,t)$ - неубывающая относительно $t\in[0,y]$ и

$$\int_t^\infty \frac{F(y)\,A(y,y-t)}{y}\,dy = O(F(t)) \qquad (1)$$

для $t>0$ , где $F(t)$ -положительная, неубывающая, дифференцируемая функция для $t\geq 0$ такая, что

$$\int_t^\infty \frac{F(y)}{y^2}dy = O\left(\frac{F(t)}{t}\right) \text{ , если } t>0. \qquad (2)$$

2. Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма I. Равномерно по $0<t<\infty$

$$\max_{0\leq x\leq y}\left|\int_0^x F(y-z)\sin(y-z)t\,dt\right| < \frac{K}{t}F(y),$$

где $F(y)$ - функция, определённая в теореме.

Доказательство. Интегрируя по частям, имеем

$$\left|\int_0^x F(y-z)\sin(y-z)t\,dz\right| = \left|F(y-z)\frac{\cos(y-z)t}{t}\Big|_0^x + \frac{1}{t}\int_0^x F'_z(y-z)\cos(y-z)t\,dz\right| \leq \frac{K}{t}F(y).$$

Лемма 2. Если $a(y,u)$ - неотрицательная и неубывающая функция относительно $u \in [0,y]$, тогда для $0 \le a < b \le \infty$ и любого $y$

$$\left| \int_a^b a(y,y-u)\, e^{i(y-u)t}\, du \right| \le K A\left(y, y-\frac{1}{t}\right).$$

Доказательство. Так как $a(y,u)$ - неотрицательная и неубывающая относительно $u \in [0,y]$, тогда $a(y,y-u)$ - неотрицательная и невозрастающая относительно $u$. Следовательно, по лемме I из [3] имеем

$$\left| \int_a^b a(y,y-u)\, e^{i(y-u)t} \right| \le K \int_0^{1/t} a(y,y-u)\, du = K \int_{y-\frac{1}{t}}^{y} a(y,v)\, dv =$$

$$= K A\left(y, y-\frac{1}{t}\right).$$

Лемма 3 Если $a(y,u)$ и $F(y)$ такие, как в теореме, тогда для $0 \le a < b \le \infty$, $y > 0$

$$\left| \int_a^b F(y-v)\, a(y,y-v)\, e^{i(y-v)t}\, dv \right| \le K F(y) A\left(y, y-\frac{1}{t}\right).$$

Доказательство. Интегрируя по частям, в силу леммы 2 имеем

$$\left| \int_0^x F(y-v)\, a(y,y-v)\, e^{i(y-v)t}\, dv \right| = \left| F(y-x) \int_0^x a(y,y-z)\, e^{i(y-z)t}\, dz \right.$$

$$\left. + \int_0^x \left( F_v'(y-v) \int_0^v a(y,y-z)\, e^{i(y-z)t}\, dt \right) dv \right| \le K F(y-x) A\left(y, y-\frac{1}{t}\right) -$$

$$- K \int_0^x F_v'(y-v)\, A\left(y, y-\frac{1}{t}\right) dv \le K F(y) A\left(y, y-\frac{1}{t}\right).$$

Лемма 4. Если $a(y,u)$ - неотрицательная и неубывающая относительно $u$ функция такая, что $A(y,0) = 1$, то при $y > 0$

$a(y,u) = O\left(1/(y-u)\right)$ для всех $u < y$.

Доказательство. Имеем

$$A(y,u) = \int_u^y a(y,z)\, dz \ge a(y,u)(y-u).$$

Следовательно,

$$a(y,u) \le \frac{A(y,u)}{y-u} \le \frac{A(y,0)}{y-u} = \frac{1}{y-u},$$

из этого следует, что $a(y,0)=O(\frac{1}{y})$.

Лемма 5. Если $a(y,u)$ неотрицательная и неубывающая относительно $u$, $-(a'_y(y,u)+a'_u(y,u))$ - неотрицательная, неубывающая по $u$, а также $A(y,0)=1$, тогда $-(A'_y+A'_z)\ge 0$ и $-(A'_y+A'_z)=O(1/y)$ при $y>0$ равномерно для $z \le y$.

Доказательство. Имеем

$$A'_y+A'_z=\int_z^y a'_y(y,t)dt+a(y,y)-a(y,z)=\int_z^y (a'_y(y,t)+a'_t(y,t))dt\le 0.$$

Рассмотрим

$$A'_y+A'_z+a(y,0)=\int_z^y a'_y(y,t)dt+a(y,y)-a(y,z)+a(y,0)=$$

$$=\int_z^y a'_y(y,t)dt-\int_0^y a'_y(y,t)dt-\int_0^z a'_t(y,t)dt=$$

$$=-\int_0^z (a'_y(y,t)+a'_t(y,t))dt\ge 0.$$

Следовательно, в силу леммы 4

$$-(A'_y+A'_z)\le a(y,0)=O(1/y).$$

Лемма 6. Если $a(y,t)$ и $-(a'_y+a'_t)$ - неотрицательные и невозрастающие относительно $t$ и $A(y,0)=1$, то

$$\frac{1}{y}\left[\left(\frac{\partial A(y,z)}{\partial y}+\frac{\partial A(y,z)}{\partial z}\right)_{z=y-u}+a(y,0)\right] \qquad (3)$$

неотрицательная, невозрастающая относительно $u$ функция для $u<y$.

Доказательство. В силу леммы 5 имеем

$$\left(\frac{\partial A(y,z)}{\partial y}+\frac{\partial A(y,z)}{\partial z}\right)_{z=y-u}+a(y,0)\ge 0,$$

а следовательно, для $u<y$ выражение (3) неотрицательно.

Докажем, что (3) является невозрастающей функцией по $u$.

Рассмотрим

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{y-u}\left(\int_{y-u}^{y} a'_y(y,t)\,dt + a(y,y) - a(y,y-u) + a(y,0)\right)\right\} = \frac{1}{(y-u)^2}\left\{a(y,y) + \right.$$

$$\left. + \left[a'_y(y,y-u) + a'_t(y,y-u)\right](y-u) + \int_{y-u}^{y} a'_y(y,t)\,dt - \int_{0}^{y-u} a'_t(y,t)\,dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{(y-u)^2}\left\{\left[a'_y(y,y-u) + a'_t(y,y-u)\right](y-u) - \int_{0}^{y-u}\left[a'_y(y,t) + a'_t(y,t)\right]dt\right\} \le 0.$$

Лемма 7. Если $a(y,t)$ - неотрицательная и неубывающая функция относительно $t \in [0,y]$ такая, что $a'_t(y,t)$ - неубывающая относительно $t \in [0,y]$, тогда $\frac{1}{y-t}\left[a(y,y-t) - a(y,0)\right]$ - неотрицательная и невозрастающая функция относительно $t < y$.

Доказательство.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{y-t}\left[a(y,y-t) - a(y,0)\right]\right\} = \frac{1}{(y-t)^2}\left[-a'_z(y,y-t) + a(y,y-t) - a(y,0)\right] =$$

$$= \frac{1}{(y-t)^2}\left[-a'_z(y,y-t)(y-t) + a'_z(y,\theta)(y-t)\right] = \frac{1}{y-t}\left(a'_z(y,\theta) - a'_z(y,y-t)\right) < 0,$$

где $0 < \theta < y-t$ по теореме о среднем значении.

Лемма 8. Если $a(y,t)$ и $-(a'_y + a'_t)$ - неотрицательные и неубывающие относительно $t \in [0,y]$ функции, то $-\frac{1}{u}(A'_y + A'_u)$ - неотрицательная и невозрастающая функция относительно $u < y$.

Доказательство. Из леммы 5 следует, что $-\frac{1}{u}(A'_y + A'_u) \ge 0$.

Рассмотрим

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{A'_y + A'_u}{u}\right) = \frac{1}{u^2}\left\{\left[a'_y(y,u) + a'_u(y,u)\right]u + \int_{u}^{y}\left[a'_y(y,t) + a'_t(y,t)\right]dt\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{u^2}\left\{\left[a'_y(y,u) + a'_y(y,u)\right]u + \left[a'_y(y,u) + a'_u(y,u)\right](y-u)\right\} =$$

$$= \frac{1}{u^2}\left[a'_y(y,u) + a'_u(y,u)\right] < 0.$$

3. Доказательство теоремы. Имеем

$$\tau(y)=\int_0^y a(y.t)\,s(t)dt=\int_0^y \varphi(t)\,A(y,t)dt.$$

В самом деле, интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^y \varphi(t)\,A(y,t)dt=s(t)\int_t^y a(y,z)dz\Big|_0^y+\int_0^y s(t)a(y,t)dt.$$

Следовательно,

$$\tau'(y)=\int_0^y \varphi(t)\,A'_y(y,t)\,dt+\varphi(y)\,A(y,y)=\int_0^y \varphi(t)\,A'_y(y,t)dt,$$

где

$$\varphi(t)=F(t)\,B(t,x)=F(t)\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi(z)\cos zt\,dz=-\frac{2}{\pi t}\int_0^\infty F(t)\sin zt\,d\varphi(z).$$

Тогда формально имеем

$$\int_0^\infty|\tau'(y)|\,dy=\int_0^\infty dy\left|\int_0^y A'_y(y,t)\left(\frac{2}{\pi t}\int_0^\infty F(t)\sin zt\,d\varphi(z)\right)dt\right|\le$$

$$\le\frac{2}{\pi}\int_0^\infty|d\varphi(z)|\int_0^\infty dy\left|\int_0^y A'_y(y,t)\,\frac{F(t)}{t}\sin zt\,dt\right|.$$

Так как по предположению $\int_0^\infty F(\tfrac{1}{z})|d\varphi(z)|<\infty$, то достаточно показать, что

$$\int_0^\infty du\left|\int_0^y A'_y(y,t)\,\frac{F(t)}{t}\sin zt\,dt\right|=O(F(1/z))\quad\text{в}\quad(0,\infty).$$

Рассмотрим

$$\int_0^\infty dy\left|\int_0^y A'_y(y,t)\,\frac{F(t)\sin zt}{t}\,dt\right|=\int_0^{1/z}+\int_{1/z}^\infty=U+V.$$

Так как $|\sin zt|\le zt$, то

$$U\le z\int_0^{1/z}dy\int_0^y\left|A'_y(y,t)F(t)^{\circ}\right|dt=z\int_0^{1/z}F(t)dt\int_t^{1/z}A'_y(y,t)dy=$$

$$=z\int_0^{1/z}F(t)\,A\left(\frac{1}{z},t\right)dt\le F\left(\frac{1}{z}\right).$$

Далее,

$$V=\int_{1/z}^{\infty}dy\left|\int_0^{y}A'_y(y,t)\,\frac{F(t)}{t}\sin zt\,dt\right|\le\int_{1/z}^{\infty}dy\left|\int_0^{y/2}A'_y\,\frac{F(t)}{t}\sin zt\,dt\right|+$$

$$+\int_{1/2}^{\infty}dy\left|\int_{y/2}^{y}A'_y(y,t)\,\frac{F(t)}{t}\sin zt\,dt\right|=\int_{1/z}^{\infty}(W+X)\,dy.$$

Тогда

$$W=\left|\int_0^{y/2}A'_y(y,t)\,\frac{F(t)}{t}\sin zt\,dt\right|\le\left|\int_0^{y/2}\left(A'_y(y,t)+A'_t(y,t)+a(y,0)\right)\frac{F(t)\sin zt}{t}dt\right|+$$

$$+\left|\int_0^{y/2}\left(A'_t(y,t)+a(y,0)\right)\frac{F(t)}{t}\sin zt\,dt\right|=Y_1+Y_2,$$

где

$$Y_1=\left|\int_0^{y/2}\left(A'_y(y,t)+A'_t(y,t)+a(y,0)\right)\frac{F(t)}{t}\sin zt\,dt\right|=$$

$$=\left|\int_{y/2}^{y}\left(A'_y(y,t)+A'_t(y,t)+a(y,0)\right)_{t=y-v}\frac{F(y-v)}{y-v}\sin z(y-v)\,dv\right|\le$$

$$\le\frac{2}{y}\left(A'_y(y,t)+A'_t(y,t)+a(y,0)\right)\Big|_{t=\frac{y}{2}}\cdot\max_{y/2\le v\le y}\left|\int_0^{v}F(y-\omega)\sin z(y-\omega)\,d\omega\right|=$$

$$=K\,\frac{F(y)}{yz}\left(A'_y(y,t)+A'_t(y,t)+a(y,0)\right)\Big|_{t=\frac{y}{2}}=K\,\frac{F(y)}{z\,y^2}$$

в силу лемм 6, I и 5. Далее, используя леммы 7, I и 4, имеем

$$Y_2=\left|\int_0^{y/2}\frac{a(y,t)-a(y,0)}{t}F(t)\sin zt\,dt\right|\le\frac{a(y,y/2)-a(y,0)}{y/2}\times$$

$$\times\max_{y/2\le v\le y}\left|\int_0^{v}F(y-t)\sin z(y-t)\,dt\right|=K\,\frac{F(y)}{z}\,\frac{a(y,y/2)-a(y,0)}{y/2}=$$

$$=K\,\frac{F(y)}{z\,y^2}.$$

Следовательно,

$$\int_{1/z}^{\infty}W\,dy\le\int_{1/z}^{\infty}Y_1\,dy+\int_{1/z}^{\infty}Y_2\,dy=O(F(1/z)).$$

Рассмотрим

$$X = \left| \int_{y/2}^{y} A'_y(y,t)\, \frac{F(t)}{t} \sin zt\, dt \right| \leq Z_1 + Z_2,$$

где

$$Z_1 = \left| \int_{y/2}^{y} \frac{a(y,t)}{t} F(t) \sin zt\, dt \right| = \left| \int_0^{y/2} \frac{a(y,y-t)}{y-t} F(y-t) \sin z(y-t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{2}{y} \int_0^{y/2} a(y,y-v) F(y-v) \sin z(y-v)\, dv - \int_0^{y} \frac{dt}{(y-t)^2} \int_0^{t} a(y,y-v) F(y-v) \sin z(y-v)\, dv \right|$$

$$\leq K \frac{F(y)}{y} A(y, y/2)$$

по лемме 3. Далее,

$$Z_2 \leq -\left( \frac{A'_y + A'_t}{t} \right)_{t=\frac{y}{2}} \cdot \max_{y/2 \leq v \leq y} \left| \int_{y/2}^{v} F(t) \sin zt\, dt \right| \leq$$

$$\leq -\left( \frac{A'_y + A'_t}{t} \right)_{t=\frac{y}{2}} \cdot 2 \max_{0 \leq \omega \leq y/2} \left| \int_0^{\omega} F(y-t) \sin z(y-t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq K \frac{F(y)}{z} \left[ -\left( \frac{A'_y + A'_t}{t} \right)_{t=y/2} \right] \leq K \frac{F(y)}{z y^2}$$

на основании лемм 8, I и 5. Следовательно,

$$\int_{\frac{1}{z}}^{\infty} X\, dy \leq \int_{1/z}^{\infty} Z_1\, dy + \int_{1/z}^{\infty} Z_2\, dy \leq K \int_{1/z}^{\infty} \frac{F(y)}{y} A(y, y/2)\, dy +$$

$$+ \frac{K}{z} \int_{1/z}^{\infty} \frac{F(y)}{y^2}\, dy \leq K F(1/z)$$

в силу соотношений (I) и (2). Таким образом, мы получили, что $V = O(F(1/z))$. Теорема доказана.

## Библиографические ссылки


I. В о р о н о й Г.Ф. Расширение понятия о пределе суммы членов бесконечного ряда // Собр. соч.: В 3 т. Киев, I953. Т.3.

2. Т и т ч м а р ш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М., I948.

3. Б о й ц у н Л.Г. Об абсолютной суммируемости сопряжённого интеграла Фурье методом Г.Ф.Вороного // Изв. вузов. Сер. Математика. I967. Т. 67, № 6.